III. Funcții. Ecuații

Probleme propuse

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-3, & x\le 0\\ 7x, & x>0\end{cases}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\le -2\\ 2x-1, & x>-2.\end{cases}$

Determinați $g\circ f$ și $f\circ g$.

2. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definită astfel: $f(0)=1$; dacă $n\ge 1$ atunci $f(n)$ este ultima cifră a numărului 7^n. i) Calculați: $f(1), f(2), \dots, f(7)$; ii) Să se arate că $f(n+4)=f(n)$ $\forall\, n\ge 1$; iii) Trasați graficul funcției f.

3. Există funcții injective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea: $f^3(x^5-x^3+x)+2f(x^5-x^3+x)=2f^2(x)+1$?

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(f(x))=x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.
Să se arate că: a) $f(1)=1$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-x\cdot f(x)+1$ nu e injectivă

5. Rezolvați:

a) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4\\ x+y=28\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt[6]{(x+y)^3\cdot(x-y)^2}=8\end{cases}$

c) $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt{9+x}=0$ e) $4^x+6^x=2\cdot 9^x$

d) $\begin{cases}x^2+y^2+xy=19\\ x^2+y^2-xy=7\end{cases}$ f) $2016^x-2015^x=1+3\left(\sqrt[3]{2015^x}+\sqrt[3]{2015^{2x}}\right)$

6. Fie familia de funcții $f_m(x)=mx^2+2(m+1)\cdot x+m+1$, $m\in\mathbb{R}^*$.
a) Să se determine m astfel încât $f_m(x)=0$ să admită soluții reale.
b) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate se găsesc pe o dreaptă.

7. Să se rezolve ecuația $3^{4\sqrt{x}}+2\cdot 3^{2\sqrt{x}}-3=0$

8. Fie ecuația $x^2+2(m-1)x+3m-5=0$, $m\in\mathbb{R}$
a) Rezolvați ecuația pt. $m=2$; b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația să aibă rădăcini egale; c) Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației aflați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2x_1x_2}\le 1$.

9. Știind că $m>0, m\ne 1$ să se rezolve:

$$\log_m x+\log_{mx}x+(\log_m x)\cdot\log_{\frac{m}{x}}x>0$$

10. Rezolvați: a) $\log_3\left(3^{4x}-3^{2x+1}+3\right)=2\log_9 7$

b) $\log_3\left(3^{4x}-3^{2x+1}+3\right)<2\log_9 7$

11. Rezolvați: a) $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$ b) $\sqrt{\dfrac{3x}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{3x}}=\dfrac{13}{6}$

c) $\begin{cases}xy=40\\ x^{\lg y}=4\end{cases}$ d) $(3-2\sqrt{2})^x+1=6(\sqrt{2}-1)^x$

e) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$

12. Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ — astfel încât graficul să aibă vârful în $V(1,2)$ și să intersecteze axa Oy în $C(0,-10)$.

13. a) Se consideră ecuația $ax^2+2ax+a-1=0$
i) Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$ ecuația are rădăcini reale?
ii) Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$ rădăcinile ecuației verifică egalitatea $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$?

b) Pentru ce valori ale parametrului m este verificată relația $m\cdot 9^x+2m\cdot 3^x+m-1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$?