II. Elemente de combinatorică. Progresii

Probleme propuse

1. Arătaţi că: $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\dots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

2. Să se determine termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{3}+\frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^n$ care îl conţine pe a^4 ştiind că suma primilor trei coeficienţi binomiali este 92.

3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} A_x^y=7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y=5C_x^{y+1} \end{cases}$

4. Să se determine $n\geq 1$ întreg minim astfel încât în dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ să existe termeni ce nu depind de x.

5. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice atunci $\forall n\geq 2$ are loc:
$$a_1-C_n^1a_2+C_n^2a_3-\dots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}a_n+(-1)^nC_n^na_{n+1}=0$$

6. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii geometrice dacă $\begin{cases} a_2-a_1=-4 \\ a_3-a_1=8. \end{cases}$ Să se calculeze apoi suma primilor n termeni.

7. Să se rezolve ecuaţia $C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^3$

8. Determinaţi numerele reale x, y, z în progresie aritmetică ştiind că $x+y+z=3$ şi $x^3+y^3+z^3=9$

9. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere reale. Se ştie că $a_2=3$ şi $a_5=6$. Să se calculeze:
   i) a_1 şi raţia r.
   ii) suma primilor 20 de termeni ai progresiei
   iii) $S=\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+\dots+\frac{1}{a_n a_{n+1}}$.

10. Să se găsească termenul în care x şi y au puteri egale din dezvoltarea:
$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}}+\sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}.$$

11. Spunem că $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ formează o progresie armonică dacă $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ formează o progresie aritmetică. Să se arate că dacă a, b, c, d sunt în progresie armonică atunci $3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$.

12. Fie S_n, S_{2n}, S_{3n} sumele primilor n, $2n$ şi $3n$ termeni ai unei progresii geometrice. Să se arate că: $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

13. Calculaţi $S=\sum_{k=0}^{n}2^k\cdot C_n^k$