XI. Elemente de trigonometrie

XII. Elemente de geometrie

1. Rezolvați

a) $\cos 2x - \cos x = 0$

b) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos 2x$

c) $(1-\sin x)^2 + \sin^2(1-x) = 0$

d) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

e) $\sqrt{3}\sin x = \cos x$

f) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$

g) $6\,\mathrm{ctg}\,x + 6\,\mathrm{tg}\,2x + 5 = 0$

h) $\sin 2x - 2\cos x = 0$

i) $\min(\sin x, \cos x) = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

j) $m \cdot \cos x - (m+1)\sin x - m = 0$, $m \in \mathbb{R}$

k) $2\cos^2 t - 11\cos t + 5 = 0$

l) $\frac{\cos 3x}{\cos x} = a$

2. Fie $\triangle ABC$ $(AB \equiv AC)$ și $M \in BC$, variabil. Se duc $MN \parallel AC$ și $MP \parallel AB$, $N \in AB$, $P \in AC$. a) Să se arate că $MN \equiv AP$ și $NA \equiv MP$.
b) Să se arate că perimetrul paralelogramului $APMN$ este constant.

3. Să se arate că $\triangle ABC$ în care $\frac{a+c}{b} = \mathrm{ctg}\frac{B}{2}$ este dreptunghic.

4. Se consideră două cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$, $r_1 > r_2$, tangente exterior în punctul T. Tangenta exterioară comună AB se intersectează cu tangenta în T la cele două cercuri în punctul C, iar cu linia centrelor O_1O_2 în punctul M.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor AB și TC în funcție de r_1 și r_2.

b) Să se arate că dreptele AT și BT sunt perpendiculare.

c) Calculați perimetrul $\triangle O_1AM$, $A \in C(O_1, r_1)$.

5. a) Să se rezolve ecuația $\sin 2x + 3\sin x = 0$, $x \in \mathbb{R}$

b) Într-un $\triangle ABC$ oarecare notăm $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Să se arate că $a = b\cos C + c\cos B$.

c) Cu notațiile de la punctul b) să se arate că
$$(a+b)\cos C + (b+c)\cos A + (c+a)\cos B = a+b+c.$$

6. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi ABC este satisfăcută relația: $1 + \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - C\right) = \frac{2}{1 - \mathrm{ctg}\,B}$ atunci triunghiul este dreptunghic. Reciproca este adevărată?

7. Să se arate că în orice $\triangle ABC$ are loc relația: $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ unde p este semiperimetrul, apoi că $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$

8. Să se arate (cu ajutorul reciprocei lui Ceva) concurența medianelor, înălțimilor și bisectoarelor unui triunghi.