X. Grupuri. Inele. Corpuri.

Probleme propuse

1. Fie M mulțimea matricilor din $M_2(\mathbb{Z})$ de forma: $A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Arătați că M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor și că formează un monoid în raport cu operația indusă. Determinați elementele simetrizabile ale monoidului M.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legile de compoziție

$$x \perp y = x+y+3,\ \forall x,y \in \mathbb{Z}$$

$$x \top y = xy + 3x+3y+6,\ \forall x,y \in \mathbb{Z}.$$

Arătați că $(\mathbb{Z},\perp,\top)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero

3. Fie $A=\{0,1,a,b\}$ un inel cu 4 elemente. 1) Arătați că $f:A\to A$, $f(x)=1+x$, $\forall x \in A$ este bijectivă. 2) Dacă A este corp atunci $1+1=0$

4. 1) Arătați că corespondența $(x,y)\to x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ este o lege de compoziție pe $G=(-1,1)$ și că $(G,*)$ este grup abelian. Arătați că $f:(\mathbb{R}_+^*,\cdot)\to(G,*)$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ izomorfism.

2) Arătați că $f:(0,+\infty)\to(-1,1)$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $\forall x\in(0,+\infty)$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

5) Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}\subseteq M_3(\mathbb{R})$. a) Arătați că M este monoid comutativ în raport cu înmulțirea matricelor. b) Determinați elementele inversabile ale monoidului M

6) Fie $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$. Arătați că corespondența $(x,y)\to x*y=x^{\ln y}$, $(\forall)x,y\in G$ este lege de compoziție pe G și $(G,*)$ este grup comutativ.

7) a) Fie $(G,\cdot)$ grup și $\forall x,y\in G$ $(xy)^2=x^2y^2$. Arătați că G este comutativ.

b) Fie $(G,\cdot)$ grup astfel încât $x^2=e$, $\forall x\in G$. Arătați că G este comutativ.

8) Fie $(G,\cdot)$ grup și $a,b\in G$ astfel încât $ab=ba$. Să se arate că:

$$a^h\cdot b^n=b^n\cdot a^h,\ \forall h,n\in\mathbb{Z}.$$

9) Fie $(G,*)$ grup și $a\in G$. Arătați că $f,g:G\to G$, $f(x)=a*x$, $g(x)=x*a$ sunt bijective.

10) Să se găsească endomorfismele și automorfismele lui $(\mathbb{Z},+)$.

11) Pe mulțimea $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definim legile de compoziție „+" și „·"

$$(a,b)+(c,d)\overset{def}{=}(a+c,\ b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)\overset{def}{=}(ac+3bd,\ ad+bc)$$

Să se arate că „+" și „·" conferă mulțimii A o structură de inel comutativ fără divizori ai lui zero.