I. Mulțimi de numere. Inducție matematică

Probleme propuse

1. Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ este irațional,
2. Să se arate că $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ este irațional
3. Calculați $E_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$
4. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$ și
$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}=\frac{6}{\sqrt{abcd}}$ atunci $a=b=c=d$
5. Fie $a>0, b>0, c>0$. Arătați că:
$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3abc}{ab+bc+ac}$$
6. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Arătați că:
$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$
(Cauchy - Buniakovski - Schwarz)
7. Arătați că $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<1$, $\forall n>1$, $n\in\mathbb{N}$.
8. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ cu proprietatea $z^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
9. Dacă α este una din rădăcinile ecuației $x^2+x+1=0$ atunci calculați expresia: $E=\alpha^{2015}+(\alpha^2+1)^{2014}+\alpha^{2013}+\alpha^2+\alpha$.
10. Calculați $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$, $i^2=-1$.
11. Fie α o rădăcină a ecuației $x^2+x+1=0$ și $n\in\mathbb{N}$. Arătați că $(1+\alpha)^n+(1+\alpha^2)^n+(\alpha+\alpha^2)^n=0$ dacă și numai dacă n este multiplu de 3.
12. (Inegalitatea lui Bernoulli). Demonstrați că: $(1+x)^n>1+nx$, $\forall n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ și $x>-1$, $x\neq 0$.
13. Arătați că: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$.
14. Arătați că: $8 \mid (5^{n+1}+2\cdot 3^n+1)$, $\forall n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$
15. Demonstrați formula lui Moivre: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$
16. Arătați că $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n<\frac{x^n+y^n}{2}$, $n\in\mathbb{N}$, $x,y>0$.
17. Pentru $n\geq 1$ arătați că: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$
18. Arătați că $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și pentru orice unghi θ ce nu e multiplu de π avem: $\cos\theta+\cos(3\theta)+\ldots+\cos((2n-1)\cdot\theta)=\frac{\sin(2n\theta)}{2\sin\theta}$
19. Arătați că $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, $\frac{(2n)!}{2^n}\in\mathbb{Z}$.
20. Arătați că $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $57 \mid 7^{n+2}+8^{2n+1}$