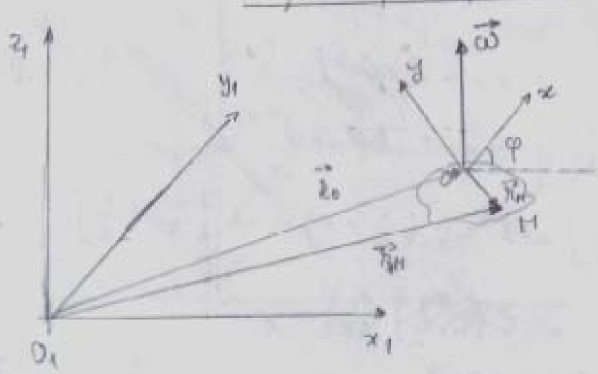
Mişcarea plan paralelă :



Mişcare plan paralelă: $\vec{\omega} \perp \vec{v}_M$.

Ec. mişcării $\begin{cases} x_0 = x_0(t) \\ y_0 = y_0(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_M = \underbrace{\vec{a}_0}_{a_{translaţie}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{a_{rotaţie}} - \underbrace{\omega^2 \vec{r}}_{a_{centripetă}}$$

<u>Centrul instantaneu de rotaţie</u>: „Mişcarea plan paralelă se compune dintr-o succesiune infinită de mişcări de rotaţie instantanee în jurul centrului instantaneu de rotaţie."

I - centru instantaneu de rotaţie ; $\vec{OI} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2}$, $OI = \dfrac{v_0}{\omega}$, $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{IM}$.

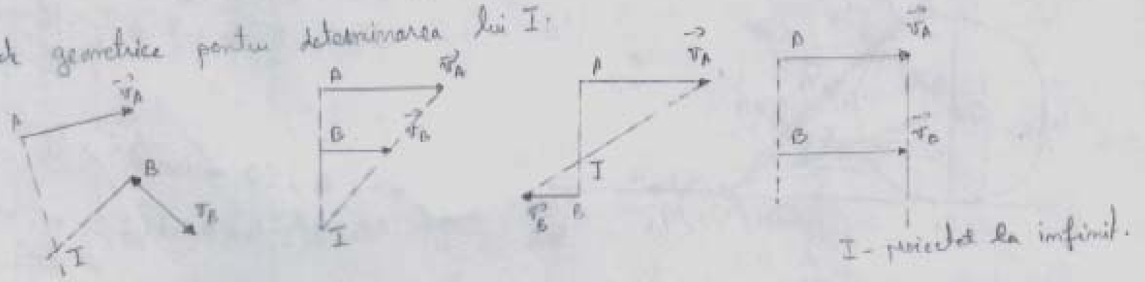
<u>Bază şi rulantă</u>: Locul geometric al pct. I în raport cu sistemul fix $O_1x_1y_1$ este o curbă care s.n. <u>bază</u>, iar l.g. în sistemul mobil s.n. <u>rulantă</u>.

x_{10}, y_{10} - coord. pct. O în $O_1x_1y_1$;

Ec. bazei: $\begin{cases} x_1 = x_{10} - \dfrac{dy_{10}}{d\varphi} \\ y_1 = y_{10} + \dfrac{dx_{10}}{\varphi} \end{cases}$

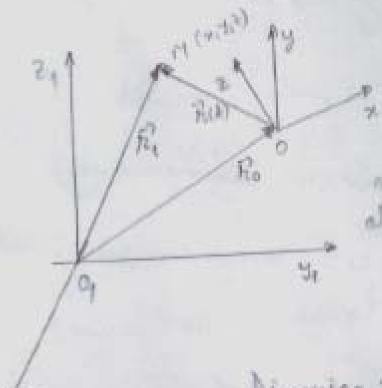
Ec. rulantei: $\begin{cases} x = \dfrac{dx_{10}}{d\varphi} \sin\varphi - \dfrac{dy_{10}}{d\varphi} \cos\varphi \\ y = \dfrac{dx_{10}}{d\varphi} \cos\varphi + \dfrac{dy_{10}}{d\varphi} \sin\varphi \end{cases}$

Metode geometrice pentru determinarea lui I:



I - proiectat la infinit.

Mişcarea relativă



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0(t) + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad , \quad \vec{v}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

viteză relativă

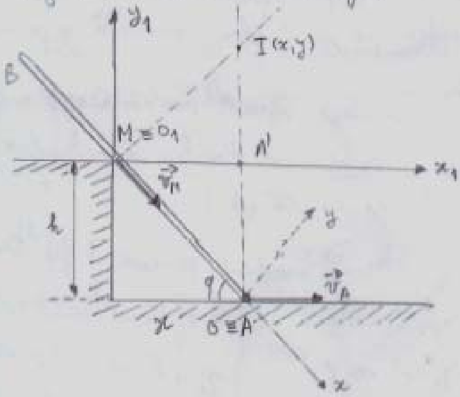
viteză absolută

$$\vec{a}_M = \underbrace{\vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_t \text{ (transport)}} + \underbrace{2\left(\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)}_{\vec{a}_c \text{ (coriolis)}} + \underbrace{\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}}_{\vec{a}_r \text{ (relativă)}}$$

acc. absolută

Dinamica: „Legea a II-a a mecanicii": $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Problema 3. Pe o treaptă de înălțime h se sprijină în mod continuu o tijă AB, a cărei extremitate A se mișcă pe podea cu viteza v_A. Să se afle ec. bazei și a rulantei și viteza unghiulară instantanee a tijei.



$$\begin{cases} x_{10} = h\,\mathrm{ctg}\,\varphi \\ y_{10} = -h \end{cases}$$

Ec. bazei: $\begin{cases} x_1 = x_{10} - \dfrac{dy_{10}}{d\varphi} \\ y_1 = y_{10} + \dfrac{dx_{10}}{d\varphi} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = h\,\mathrm{ctg}\,\varphi \Rightarrow \mathrm{ctg}\,\varphi = \dfrac{x_1}{h} \\ y_1 = -h - h\dfrac{1}{\sin^2\varphi} = -h - h\dfrac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = -h - h(\mathrm{ctg}^2\varphi + 1) \Rightarrow y_1 = -h - h\left(\frac{x_1^2}{h^2} + 1\right) \Rightarrow \boxed{y_1 = -\frac{x_1^2}{h} - 2h}$$ ec. unei parabole

Ec. rulantei: $\begin{cases} x = \dfrac{dx_{10}}{d\varphi}\sin\varphi - \dfrac{dy_{10}}{d\varphi}\cos\varphi \\ y = \dfrac{dx_{10}}{d\varphi}\cos\varphi + \dfrac{dy_{10}}{d\varphi}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -h\dfrac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\sin\varphi \Rightarrow x = -\dfrac{h}{\sin\varphi} \\ y = -h\dfrac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\cos\varphi \Rightarrow y = -h\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = h^2\dfrac{1}{\sin^2\varphi} = h^2\dfrac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = h^2(\mathrm{ctg}^2\varphi + 1) \qquad \mathrm{ctg}^2\varphi = \dfrac{x^2}{h^2} - 1 \\ y^2 = +h^2\dfrac{\mathrm{ctg}^2\varphi}{\sin^2\varphi} \\ \sin\varphi = -\dfrac{h}{x} \end{cases} \Rightarrow y^2 = +h^2\frac{\frac{x^2}{h^2} - 1}{\frac{x^2}{h^2}} \Rightarrow$$

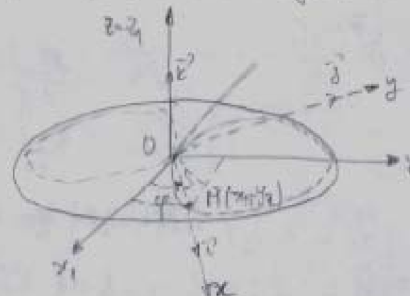
$$\Rightarrow \frac{x^2y^2}{h^2} = h^2\left(\frac{x^2 - h^2}{h^2}\right) \Rightarrow \boxed{x^2y^2 = h^2(x^2 - h^2)}$$ - ec. rulantei.

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{IA} \Rightarrow v_A = |\vec{\omega} \times \vec{IA}| \underset{\vec{\omega} \perp \vec{IA}}{=} \omega \cdot IA \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{IA}$$

T. catetei: $MA^2 = AA' \cdot IA \Rightarrow IA = \dfrac{MA^2}{AA'} = \dfrac{x^2 + h^2}{h} = \dfrac{h^2/\sin^2\varphi}{h}$ $\Rightarrow \omega = \dfrac{v_A}{h}\sin^2\varphi$

$MA \sin\varphi = h \Rightarrow MA = \dfrac{h}{\sin\varphi}$

Problema 4 Un disc de rază R se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe $Oz_1 = Oz$ care trece prin centrul său și este perpendiculară pe planul discului. Pe diametrul discului se mișcă un punct material M, care pornește din centru după legea $S = R\sin(\omega t)$. Să se afle traiectoria, viteza și accelerația absolută a punctului M.



Se alege reperul mobil $Oxyz$ astfel încât Ox să aibă direcția diametrului pe care se mișcă pct. M.

Fie φ unghiul pe care îl fac Ox și Ox_1.

$$\begin{cases} x_1 = S\cos\varphi \\ y_1 = S\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = R\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ y_1 = R\sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi = \omega t} \quad \boxed{\dot\varphi = \omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = R\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ y_1 = R\sin^2(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = R^2\sin^2(\omega t)\left[1-\sin^2(\omega t)\right] \\ y_1 = R\sin^2(\omega t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 = R^2\frac{y_1}{R}\left[1-\frac{y_1}{R}\right] \Rightarrow x_1^2 = R^2\cdot\frac{y_1}{R} - y_1^2 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - Ry_1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x_1^2 + \left(y_1 - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}} \text{ - ec unui cerc}$$

$$\vec v_M = \vec v_r + \vec v_t, \qquad \vec v_r = \frac{ds}{dt}\cdot\vec i = R\omega\cos(\omega t)\cdot\vec i$$

$$\vec v_t = \vec\omega\times\vec r = \omega\vec k\times R\sin(\omega t)\cdot\vec i = \omega R\sin(\omega t)\cdot\vec j$$

Atunci $\vec v_M = R\omega\left(\cos(\omega t)\cdot\vec i + \sin(\omega t)\cdot\vec j\right) \Rightarrow v_M = R\omega.$

$$\vec a_M = \vec a_t + \vec a_c + \vec a_r$$

$$\vec a_r = \frac{d\vec v_r}{dt} = -R\omega^2\sin(\omega t)\cdot\vec i$$

$$\vec a_t = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) = -\omega^2\vec r = -\omega^2 R\omega\sin(\omega t)\cdot\vec i$$

$$\vec a_c = 2\left(\vec\omega\times\frac{\partial\vec r}{\partial t}\right) = 2(\vec\omega\times\vec v_r) = 2\omega\cdot\vec k\times R\omega\cos(\omega t)\cdot\vec i = 2R\omega^2\cos(\omega t)\cdot\vec j$$

Deci: $\vec a_M = 2R\omega^2\left(-\sin(\omega t)\cdot\vec i + \cos(\omega t)\cdot\vec j\right)$

$a_M = 2R\omega^2$

Dinamica punctului material

Principii: inerției, acțiunii forțelor (legea fundamentală a lui Newton), acțiunii și reacțiunii, acțiunii independente a forțelor (compunerea forțelor).

Legea fundamentală: $\vec{F}(X,Y,Z)$

(1) $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$ sau (2) $\begin{cases} m\ddot{x} = X(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) \\ m\ddot{y} = Y(\ldots) \\ m\ddot{z} = Z(\ldots) \end{cases}$ sau (3) $\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = F_r \\ \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$ sau (4) $\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = F_\tau \\ m\frac{v^2}{R} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}$

(vectorial) (coord. carteziene) (coord. polare) (coord. intrinseci)

Teoremele generale ale dinamicii

1. Teorema cantității de mișcare (impulsului)

$\vec{H}=m\vec{v}$ - impulsul; $\boxed{\frac{d\vec{H}}{dt}=\vec{F}}$; Integrale prime: $\begin{cases} a)\ \vec{F}=0 \Rightarrow \vec{H} = \text{constant} \\ b)\ \vec{F}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{H}\cdot\vec{u} = \text{constant.} \end{cases}$

Integrală primă: Numim integrală primă a sistemului (1) sau (2) o funcție f în care înlocuind soluțiile x, y, z obținem: $f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=$ constant. Integrala primă poate să înlocuiască o ecuație a sistemului (2) și să simplifice rezolvarea acestuia.

2. Teorema momentului cinetic

$\vec{K}_0=\vec{r}\times\vec{H}=\vec{r}\times m\vec{v}$ - momentul cinetic ; $\boxed{\frac{d\vec{K}_0}{dt}=M_0\vec{F}}$

3. Lucrul mecanic : $\left.\begin{array}{l}\boxed{dL=\vec{F}\cdot d\vec{r}} \\ \vec{F}(X,Y,Z)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{dL = X\,dx+Y\,dy+Z\,dz}$

Dacă $\exists$ funcția U astfel încât $\vec{F}=\text{grad}\,U$ spunem că $U=-V$ este o funcție potențială și că $\vec{F}$ derivă dintr-o funcție de forță sau că este o forță potențială (conservativă).

Condiția necesară și suficientă ca să existe U este: $\boxed{\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x};\ \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x};\ \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}}$

Atunci avem: $dL=dU \Rightarrow L=\int_A^B dU = U(B)-U(A)$.

4. Teorema energiei cinetice :

$T=\frac{1}{2}mv^2$; $\boxed{dT=dL}$ - teorema energiei cinetice

Dacă $\vec{F}$ este potențială ($\vec{F}=\text{grad}\,U$) $\Rightarrow T-U=h=T_0-U_0$

$\boxed{T+V=h} \Rightarrow$ principiul conservării energiei mecanice.