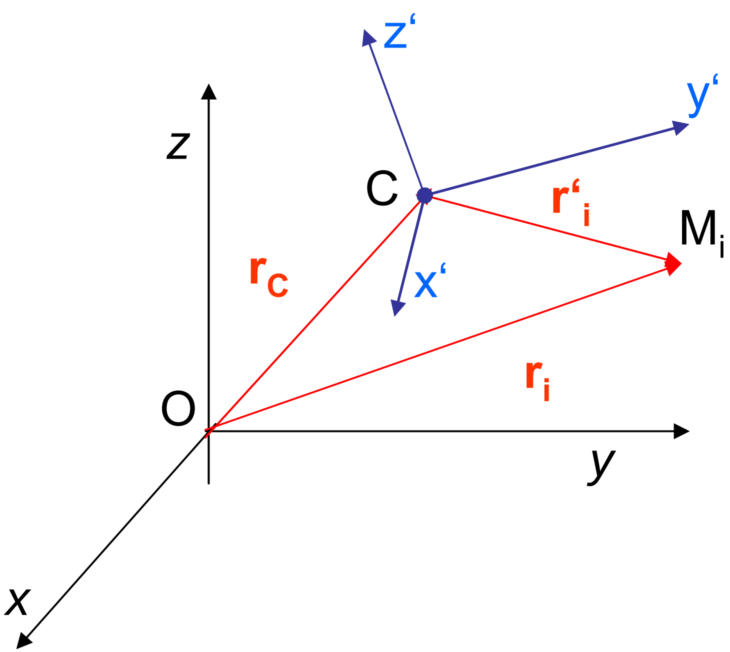
Teoremele generale in miscarea sistemelor materiale in jurul centrului maselor

Fie *(S)*: M_i (m_i), $\mathbf{r}_i = \mathbf{OM}_i$, $i = 1,..., N$ un sistem material aflat in miscare fata de un reper inertial (in particular, fix) Oxyz si fie un reper cartezian Cx'y'z' cu originea in centrul maselor C al sistemului considerat si cu axele orientate invariabil in spatiu, adica presupunem ca Cx'y'z' are doar o miscare de translatie cu viteza punctului C fata de reperul fix Oxyz.

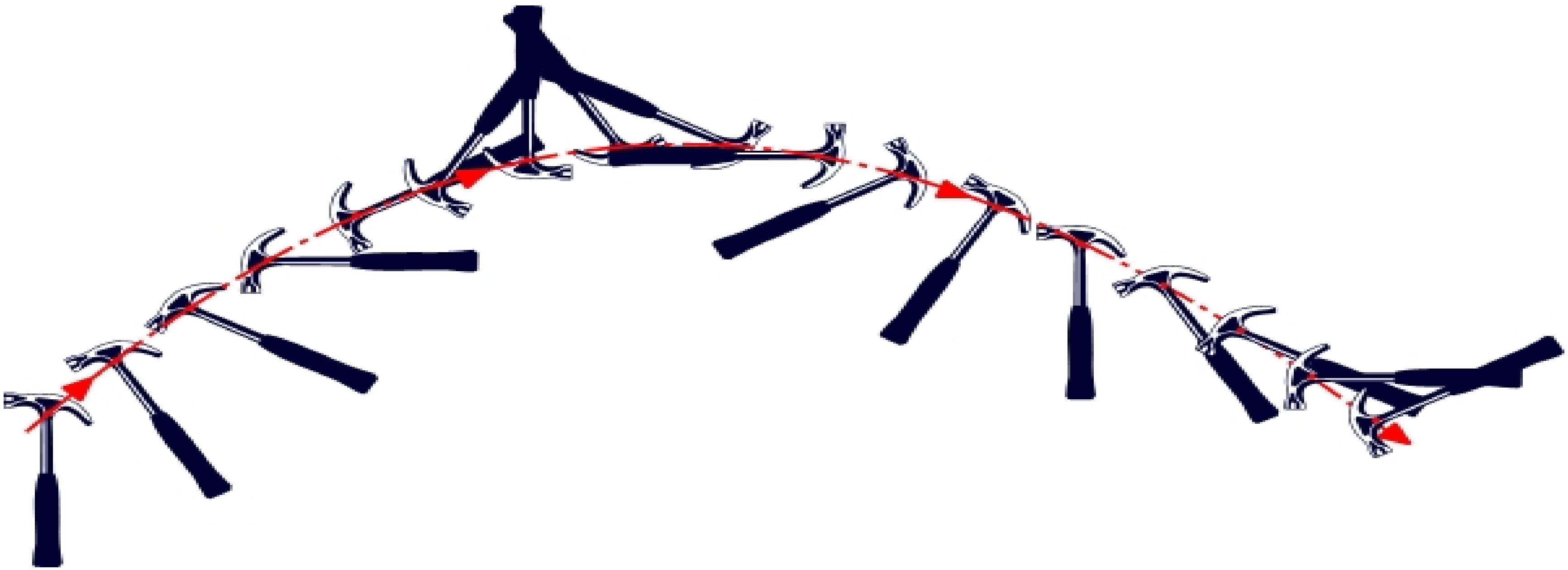


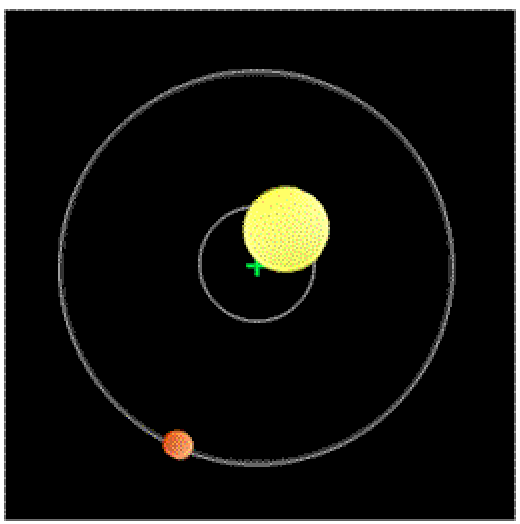
Fie $\mathbf{r'}_i = \mathbf{CM}_i$, $i = 1,..., N$. Atunci avem descompunerea:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}\,'_i\,, \quad i = 1,..., N \qquad (1)$$

Definitie:
Miscarea sistemului de puncte materiale fata de reperul mobil Cx'y'z' se numeste <u>miscarea sistemului in jurul centrului de greutate.</u>

Teoremele generale in miscarea sistemelor materiale in jurul centrului maselor





Derivand (1) avem:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i \qquad (2)$$

Teoremele generale in miscarea sistemelor materiale in jurul centrului maselor

Intr-adevar tinand cont ca: $\vec{r}\,'_i = x'_i\,\vec{i}\,' + y'_i\,\vec{j}\,' + z'_i\,\vec{k}\,'$ si de formulele lui Poisson

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}\,',\quad \frac{d\vec{j}\,'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j}\,',\quad \frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}\,' \tag{3}$$

deoarece miscarea lui Cx'y'z' este de translatie (ω = 0) avem:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'_i}{dt} =$$

$$= \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{dx'_i}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'_i}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'_i}{dt}\vec{k}\,' + \frac{d\vec{i}\,'}{dt}x'_i + \frac{d\vec{j}\,'}{dt}y'_i + \frac{d\vec{k}\,'}{dt}z'_i =$$

$$= \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'_i}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'_i \underset{\vec{\omega}=0}{=} \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'_i}{dt} = \vec{v}_C + \vec{v}\,'_i$$

Teoremele generale in miscarea sistemelor materiale in jurul centrului maselor

Deoarece originea sistemului mobil se afla in centrul maselor C, deducem relatiile:

$$0 = \overrightarrow{CC} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}\,'_i, \quad m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

unde *m* este masa totala a sistemului. Asadar avem:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}\,'_i = 0 \qquad (4) \qquad \text{si} \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}\,'_i = 0 \qquad (5)$$

Momentul cinetic al sistemului de puncte materiale fata de punctul O

$$\vec{K}_O \underset{\text{definitie}}{=} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j \underset{(1),\,(2)}{=} \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_C + \vec{r}\,'_j\right) \times m_j \left(\vec{v}_C + \vec{v}\,'_j\right) =$$

$$= \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \sum_{j=1}^{N} \vec{r}\,'_j \times m_j \vec{v}\,'_j + \vec{r}_C \times \underbrace{\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}\,'_j}_{\underset{(5)}{=}\,0} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}\,'_j\right)}_{\underset{(4)}{=}\,0} \times \vec{r}_C$$

Asadar avem:

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times m\dot{\vec{r}}_C + \vec{K}\,'_C \qquad (6)$$

unde

$$\vec{K}'_C = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}'_j \times m_j \dot{\vec{r}}'_j \tag{7}$$

Formula (7) defineste <u>momentul cinetic al sistemului de puncte materiale in miscarea acestuia in jurul centrului maselor</u>.

Definitie:
Formula (6) se numeste <u>prima formula a lui Koenig (König) </u>si ne arata ca momentul cinetic al sistemului fata de punctul O este egal cu momentul cinetic al centrului maselor la care se adauga momentul cinetic al miscarii sistemului in jurul centrului maselor.

In continuare aplicam acelasi rationament si in calculul energiei cinetice:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v_j^{\,2} \underset{(2)}{=} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{\vec{r}}_C + \vec{v}'_j\right)^2 =$$

Teoremele generale in miscarea sistemelor materiale in jurul centrului maselor

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_C^{\,2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \overleftarrow{v}'^{\,2}_j+\underbrace{\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}'_j\,\vec{v}_C}_{\underset{(5)}{=}0} \qquad (7)$$

sau

$$T=\frac{1}{2} m v_C^{\,2}+T'_C \qquad (8)$$

unde

$$T'_C=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \overleftarrow{v}'^{\,2}_j \qquad (9)$$

este <u>energia cinetica a sistemului in miscarea in jurul centrului maselor C</u>.

Definitie:
Formula (8) reprezinta a doua formula a lui Koenig (König) si ne arata ca energia cinetica a sistemului fata de reperul Oxyz este egala cu energia cinetica a centrului maselor la care se adauga energia cinetica a sistemului in miscarea in jurul centrului maselor C.

Teorema momentului cinetic in miscarea sistemului in jurul centrului maselor C

Avem teorema generala a momentului cinetic:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O \tag{10}$$

unde $\vec{M}_O = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_j$ este momentul rezultant al fortelor exterioare. Dar

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} \underset{(6)}{=} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{K}'_C\right) = \vec{r}_C \times m\vec{a}_C + \dot{\vec{K}}'_C$$

Teoremele generale in miscarea sistemelor materiale in jurul centrului maselor

Daca tinem cont de teorema centrului maselor, m$\mathbf{a}_C$ = $\mathbf{R}$, avem:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{R} + \dot{\vec{K}}'_C \qquad (11)$$

Folosind formula de schimbare a momentului rezultant in raport cu polul

$$\vec{M}_O = \vec{M}_C + \overrightarrow{OC} \times \vec{R} \qquad (12)$$

si ecuatiile (11) si (12) avem :

$$\vec{r}_C \times \vec{R} + \dot{\vec{K}}'_C = \overrightarrow{OC} \times \vec{R} + \vec{M}_C \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{K}'_C}{dt} = \vec{M}_C \qquad (13)$$

Teorema momentului cinetic in miscarea sistemului in jurul centrului maselor:
Derivata in raport cu timpul t a momentului cinetic al sistemului in raport cu centrul maselor este egala cu momentul rezultant al fortelor exterioare evaluat fata de centrul maselor.

Dinamica punctului material supus la legaturi

Teorema energiei cinetice in miscarea sistemului in jurul centrului maselor C

Teorema energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale este:

$$dT = \delta L^{(\text{ext})} + \delta L^{(\text{int})} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j d\vec{r}_j + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{j-1} \vec{F}_{jk} d\vec{r}_{jk} \qquad (14)$$

Din a doua formula a lui Koenig avem:

$$dT = d\left(\frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}_C^{\,2} + T'_C\right) = dT'_C + m\dot{\vec{r}}_C d\dot{\vec{r}}_C \qquad (15)$$

Calculam lucrul mecanic elementar al fortelor exterioare:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j d\vec{r}_j \underset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j d\left(\vec{r}_C + \vec{r}'_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j d\vec{r}'_j + \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j\right) d\vec{r}_C = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j d\vec{r}'_j + \vec{R} d\vec{r}_C \qquad (16)$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Din teorema centrului maselor avem:

$$m\frac{d\dot{\vec{r}}_C}{dt} = \vec{R}\,\Big|\cdot d\vec{r}_C \Rightarrow m\frac{d\dot{\vec{r}}_C}{dt}d\vec{r}_C = \vec{R}\cdot d\vec{r}_C \Rightarrow m d\dot{\vec{r}}_C\cdot\dot{\vec{r}}_C = \vec{R}\cdot d\vec{r}_C \tag{17}$$

Din (16) si (17) avem:

$$\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j d\vec{r}_j = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j d\vec{r}\,'_j + \vec{R}d\vec{r} = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j d\vec{r}\,'_j + m d\dot{\vec{r}}_C\dot{\vec{r}}_C \tag{18}$$

iar din (14), (15) si (18) obtinem:

$$dT' = \delta L'^{(\mathrm{ext})} + \delta L'^{(\mathrm{int})} = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j d\vec{r}\,'_j + \sum_{j,k=1}^{N}\vec{F}_{jk} d\vec{r}\,'_j \tag{19}$$

unde $\delta L'^{(ext)}$ este lucrul mecanic elementar al fortelor exterioare fata de reperul Cx‘y‘z‘, iar $\delta L'^{(int)}$ este lucrul mecanic elementar al fortelor interioare fata de reperul Cx‘y‘z‘.

<u>Teorema energiei cinetice in miscarea sistemului in jurul centrului maselor C</u>: Diferentiala energiei cinetice a sistemului aflat in miscare in jurul centrului maselor C este egala cu suma dintre lucrul mecanic elementar al fortelor exterioare si lucrul mecanic elementar al fortelor interioare, ambele evaluate fata de reperul mobil Cx‘y‘z‘.

Momente de inertie

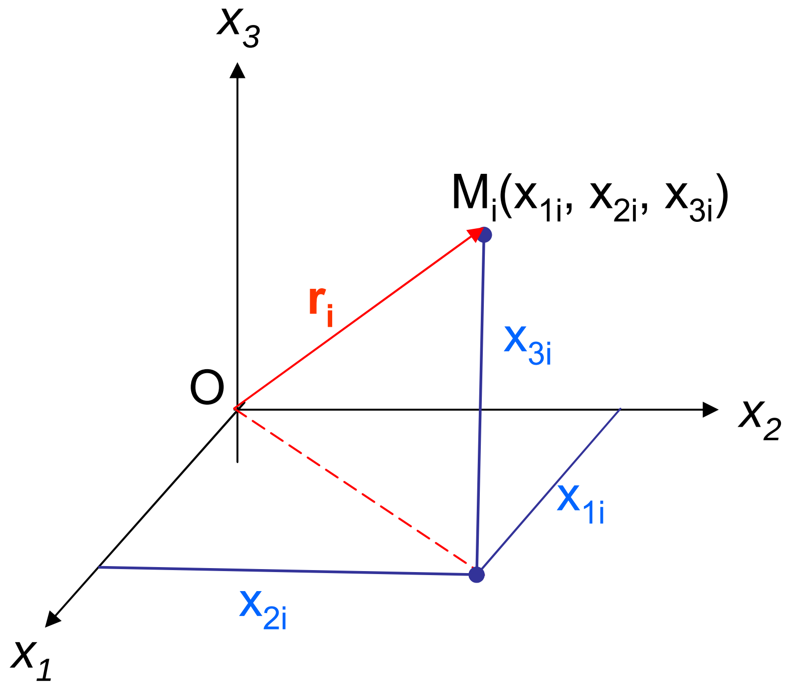
Fie (*S*) un sistem material (discret – numar finit de puncte materiale M_i (m_i), i = 1,..., N sau continuu – corp solid rigid) raportat la un reper ortogonal $Ox_1x_2x_3$ si V o varietate simpla din $\mathbf{R}^3$ (punct, dreapta sau plan)

Definitie: Marimea scalara I(V) egala cu:

(1)
$$I(V) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i d_i^{\,2} & \text{, (S) sistem discret de N puncte materiale} \\ \int_V d^2 dm = \int_D d^2 \rho \, d\tau & \text{, (S) corp solid rigid care ocupa domeniul D, iar } d\tau \text{ este elemnt de volum, arie sau lungime} \end{cases}$$

se numeste <u>moment de inertie a sistemului (S) fata de varietatea V</u>. In functie de natura varietatii: punct, dreapta sau plan momentele se numesc <u>polare</u>, <u>axiale</u> sau <u>planare</u>.

In formula (1)
- d_i reprezinta distanta de la punctul M_i pana la varietatea V
- d reprezinta distanta de la punctl curent M, in raport cu care se face integrarea, pana la varietatea V.



Daca V = Ox_1 sau Ox_2 sau Ox_3, definim <u>momentele axiale</u>:

Momente de inertie

$$I_{11} = I(Ox_1) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{2i}^{\ 2} + x_{3i}^{\ 2}\right) & \text{, sistem discret} \\ \int_V \left(x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}\right) dm & \text{, corp solid rigid} \end{cases} \qquad (2a)$$

$$I_{22} = I(Ox_2) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{1i}^{\ 2} + x_{3i}^{\ 2}\right) & \text{, sistem discret} \\ \int_V \left(x_1^{\ 2} + x_3^{\ 2}\right) dm & \text{, corp solid rigid} \end{cases} \qquad (2b)$$

$$I_{33} = I(Ox_3) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{1i}^{\ 2} + x_{2i}^{\ 2}\right) & \text{, sistem discret} \\ \int_V \left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}\right) dm & \text{, corp solid rigid} \end{cases} \qquad (2c)$$

Momente de inertie

Consideram si marimile scalare numite <u>produse de inertie</u>:

$$I_{12}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} m_i x_{1i} x_{2i} \\ \int_V x_1 x_2 dm\end{cases} \quad (3a)$$

$$I_{23}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} m_i x_{2i} x_{3i} \\ \int_V x_2 x_3 dm\end{cases} \quad (3b)$$

$$I_{31}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} m_i x_{3i} x_{1i} \\ \int_V x_3 x_1 dm\end{cases} \quad (3c)$$

Se observa ca $I_{12} = I_{21}$, $I_{23} = I_{32}$, $I_{31} = I_{13}$. Folosind relatiile (2) si (3) se construieste matricea de inertie relativ la punctul O.

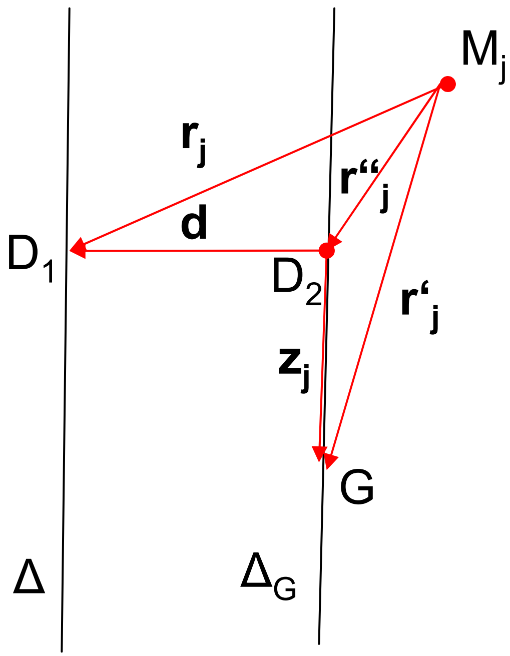
$$I_O=\begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33}\end{pmatrix} \quad (4)$$

Teorema lui Steiner:

Fie G centrul maselor (centrul de greutate) sistemului material (S). Fie Δ si Δ_G doua drepte paralele astfel incat G apartine dreptei Δ_G. Fie d = dist (Δ, Δ_G). Atunci intre momentele de inertie fata de cele doua drepte avem relatia:

$$I(\Delta) = I(\Delta_G) + md^2 \qquad (5)$$

unde m este masa sistemului.



Avem ca:

$$\vec{r}_j = \vec{d} + \vec{r}''_j \quad \sum m_j \vec{r}'_j = 0 \quad \sum m_j \vec{z}_j = 0$$

Intr-adevar: $0 = \overrightarrow{GG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}'_i$ iar

$$\sum m_j \vec{z}_j = pr_{\Delta_g}\left(\sum m_j \vec{r}'_j\right) = 0$$

Teoremele generale in miscarea sistemelor materiale in jurul centrului maselor

Avem atunci:

$$\sum m_j \vec{r}''_j = \sum m_j \left(\vec{r}'_j - \vec{z}_j \right) = 0$$

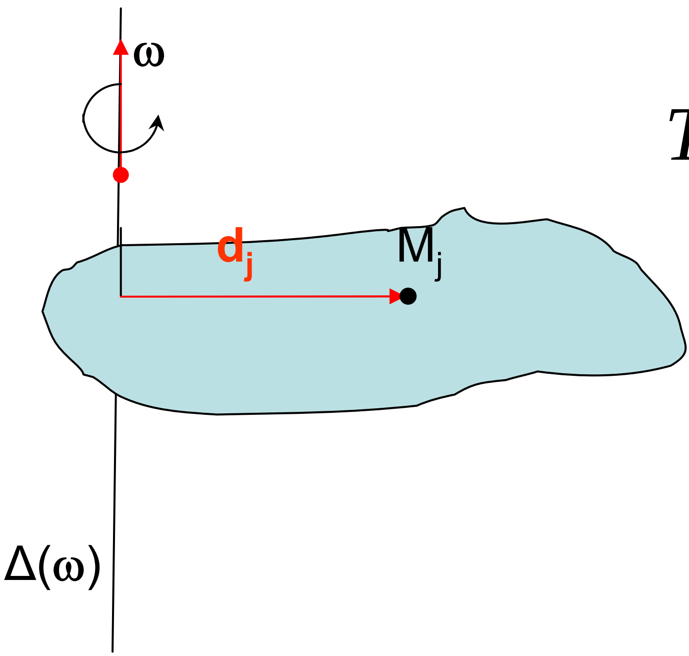
iar momentul fata de axa Δ este:

$$I(\Delta) = \sum m_j \vec{r}_j^{\,2} = \sum m_j \left(\vec{d} + \vec{r}''_j \right)^2 =$$

$$= \sum m_j \vec{r}''^{\,2}_j + md^2 + 2\vec{d} \cdot \sum m_j \vec{r}''_j =$$

$$= I(\Delta_G) + md^2$$

Observatie: In cazul miscarii de rotatie a unui sistem rigid (S) in jurul unei axe fixe $\Delta(\omega)$ cu viteza unghiulara ω, energia cinetica a sistemului devine:



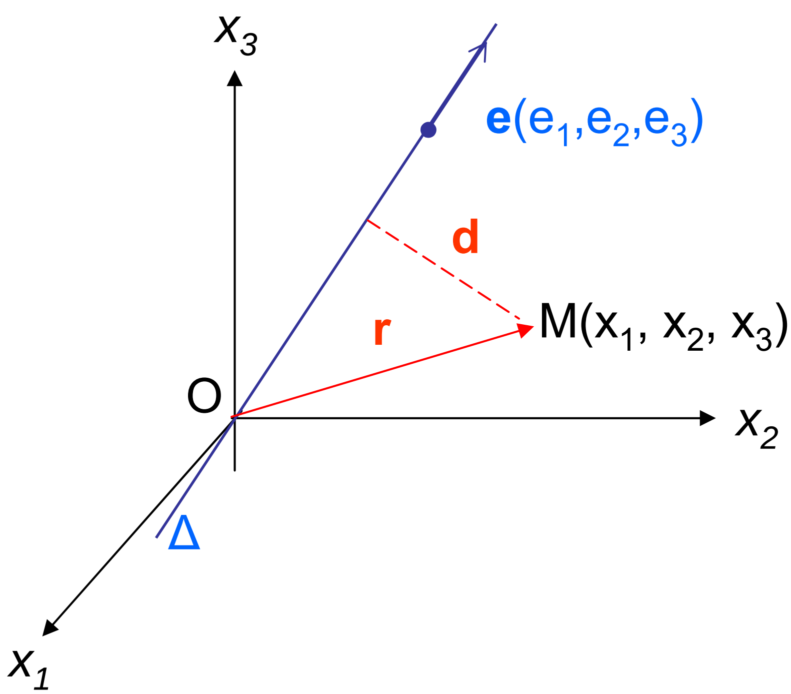
$$T = \frac{1}{2}\sum m_j v_j^{\,2} = \frac{1}{2}\sum m_j\left(\vec{\omega}\times\vec{d}_j\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_j \omega^2 d_j^{\,2} \underbrace{\sin^2\left(\vec{\omega},\vec{d}_j\right)}_{=1} = \frac{1}{2} I(\Delta)\omega^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I(\Delta)\omega^2}$$

Momente de inertie in raport cu axe concurente

Fie $\Delta(\mathbf{e})$ o dreapta ce trece prin punctul O, e = (e_1, e_2, e_3) fata de $Ox_1x_2x_3$, $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ (**e** este un versor al axei Δ).



Pentru un solid rigid (S) avem:

$$I(\Delta) = \int_S d^2 dm =$$

$$= \int_S \left(\vec{r}^{\,2} - (\vec{r} \cdot \vec{e})^2\right) dm =$$

$$= \int_S \left\{ \left(x_1^{\;2} + x_2^{\;2} + x_3^{\;2} \right) \left(e_1^{\;2} + e_2^{\;2} + e_3^{\;2} \right) - \left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \right)^2 \right\} dm =$$

$$= \int_S \left\{ \left(x_2^{\;2} + x_3^{\;2} \right) e_1^{\;2} + \left(x_1^{\;2} + x_3^{\;2} \right) e_2^{\;2} + \left(x_1^{\;2} + x_2^{\;2} \right) e_3^{\;2} - \right.$$

$$\left. - 2 x_1 x_2 e_1 e_2 - 2 x_2 x_3 e_2 e_3 - 2 x_3 x_1 e_3 e_1 \right\} dm$$

Deci

$$I(\Delta) = I_{11} e_1^{\;2} + I_{22} e_2^{\;2} + I_{33} e_3^{\;2} - 2 I_{12} e_1 e_2 - 2 I_{23} e_2 e_3 - 2 I_{31} e_3 e_1 \tag{6}$$

sau condensat, in forma matriciala:

$$I(\Delta) = \{\vec{e}\}^T \left[I_O \right] \{\vec{e}\} \tag{6'}$$

Momente de inertie

Matricea I_O este o matrice simetrica si cu elemente reale, deci este o matrice diagonalizabila.

Proprietate: In punctul arbitrar O din spatiu exista trei directii $\Delta_i(\mathbf{e}^{(i)})$, i = 1,2,3 fata de care momentul de inertie are valori extreme. In plus aceste directii sunt ortogonale ($\mathbf{e}^{(i)} \perp \mathbf{e}^{(j)}$, $i \neq j$) si daca raportam matricea de inertie la reperul cu originea in O determinat de aceste directii, matricea va avea forma:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

unde A, B, C sunt momentele de inertie ale lui (S) fata de cele trei directii, numite directii principale de inertie.

A, B, C sunt valorile proprii ale matricei I_O, iar $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}^{(3)}$ sunt vectorii proprii.

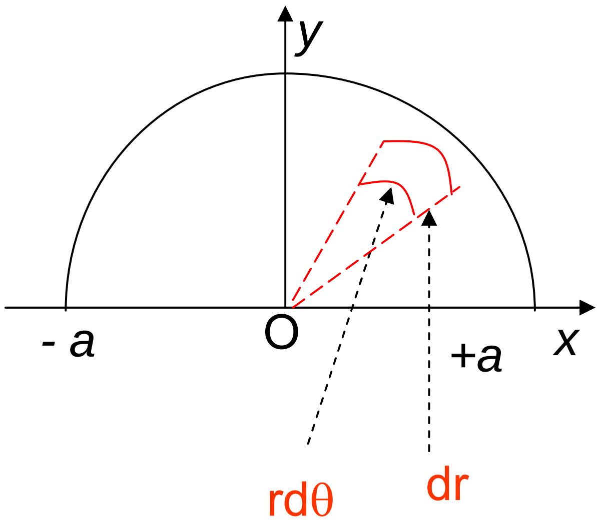
Momente de inertie

Daca (S) admite un plan de simetri π atunci centrul de greutate G, apartine planului, doua axe principale de inertie apartin planului π si a treia este perpendiculara pe π.

Daca Δ este o dreapta de simetrie pentru (S), atunci centrul de greutate G apartine dreptei si Δ este o axa principala de inertie.

<u>Exemple</u>

1.Sa se calculeze masa M si coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) pentru un semidisc de raza a si densitate ρ.



$$M = \frac{1}{2} A_{disc}\rho = \frac{\pi a^2 \rho}{2}$$

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x dm = \frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^\pi r^2 \cos\theta dr d\theta = 0$$

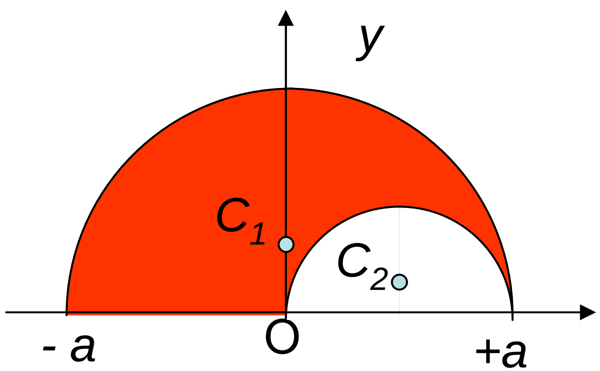
$$dm = \rho dV, \quad dV = dxdy = r dr d\theta$$

Observatie: Din simetria placii se observa ca x_G =0.

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_D y dm = \frac{\rho}{M}\int_0^a\int_0^\pi r^2 \sin\theta dr d\theta = \frac{4a}{3\pi}$$

Exemple

2.Sa se calculeze masa M si coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) pentru un placa e mai jos (densitate ρ).



$$M = M_1 - M_2 =$$

$$= \frac{\pi a^2 \rho}{2} - \frac{\pi (a/2)^2 \rho}{2} = \frac{3\pi a^2 \rho}{8}$$

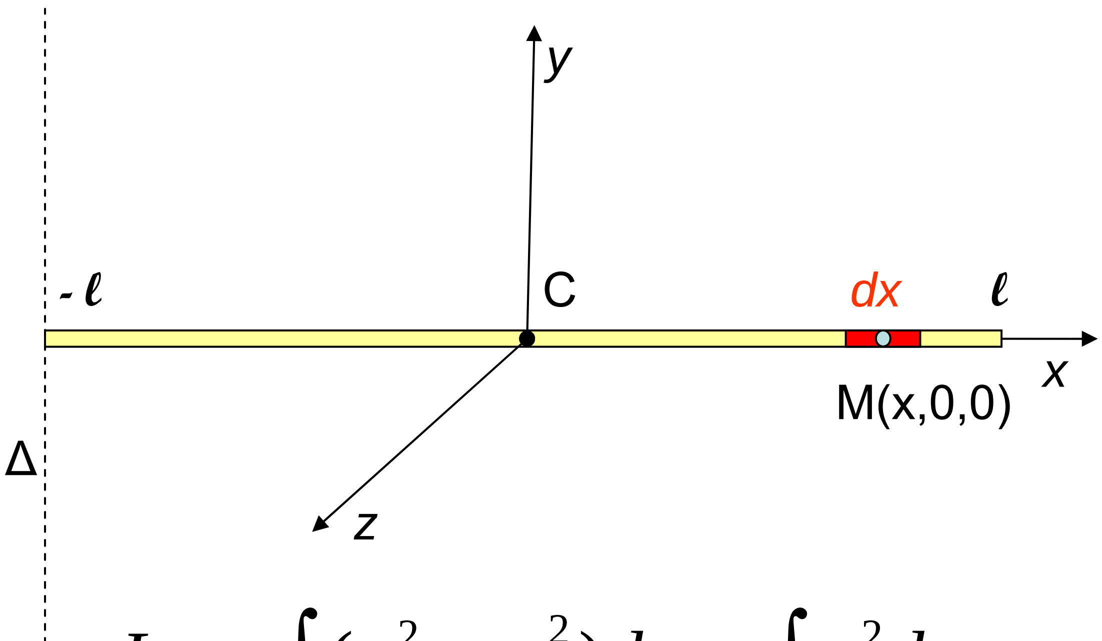
$$x_{G_1} = 0, \quad y_{G_1} = \frac{4a}{3\pi}, \quad x_{G_2} = \frac{a}{2}, \quad y_{G_2} = \frac{2a}{3\pi}$$

Observatie: Masa lipsa se poate considera masa negativa.

$$x_G = \frac{M_1 x_{G_1} - M_2 x_{G_2}}{M_1 - M_2} = -\frac{a}{6}, \quad y_G = \frac{M_1 y_{G_1} - M_2 y_{G_2}}{M_1 - M_2} = \frac{14a}{9\pi}$$

Exemple

3. Sa se calculeze momentele de inertie in raport cu centrul de inertie C si fata de axa Δ pentru o bara rectilinie de lungime 2ℓ si densitate ρ.



$$I_{Cx} = \int_D (\underbrace{y^2}_{=0} + \underbrace{z^2}_{=0})dm = 0$$

Tinem cont ca:

$$dm = \rho dl = \rho dx$$

$$I_{Cy} = \int_D (x^2 + \underbrace{z^2}_{=0})dm = \int_D x^2 dm = \rho \int_{-l}^{l} x^2 dx = \frac{ml^2}{3}$$

$$I_{Cz} = \int_D (x^2 + \underbrace{y^2}_{=0})dm = \int_D x^2 dm = \rho \int_{-l}^{l} x^2 dx = \frac{ml^2}{3}$$

Momente de inertie

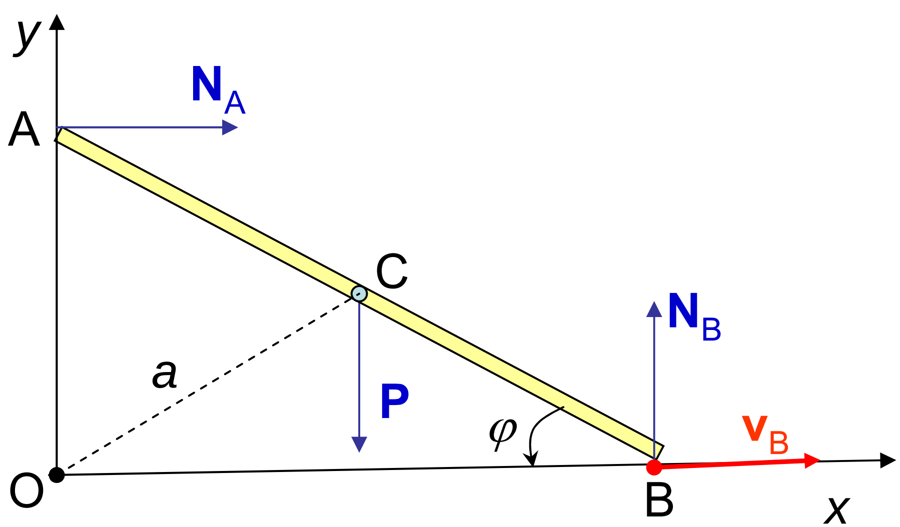
$$I_{zy} = \int_D yzdm = 0, \quad I_{xz} = \int_D xzdm = 0, \quad I_{xy} = \int_D xydm = 0$$

Pentru a calcula momentul fata de dreapta Δ aplicam teorema lui Steiner:

$$I_{\Delta} = I_G + Md^2 = I_{Cy} + ml^2 = \frac{4ml^2}{3}$$

Exemple

4.O bara omogena AB de lungime 2a si greutate **P** se misca sub actiunea greutatii sale, alunecand cu capetele A si B pe un perete vertical neted Oy si respectiv pe pardoseala orizontala neteda Ox. Sa se determine viteza unghiulara ω a barei si presiunile $\mathbf{N}_A$ si $\mathbf{N}_B$ exercitate de perete, respectiv podea in functie de unghiul φ facut de bara cu Ox, daca la momentul initial bara este fixa $\varphi = \varphi_0$. Pentru ce valoare a lui φ se va desprinde bara de perete?



Deoarece fortele ce actioneaza asupra sistemului (greutatea **P**) sunt potentiale, are loc teorema de conservare a energiei mecanice ($\mathbf{N}_A$ si $\mathbf{N}_B$ nu dau lucru mecanic deoarece sunt perpendiculare pe deplasari).

Conform teoremei lui Koenig avem:

Momente de inertie

$$T = \frac{1}{2} m v_C{}^2 + T'_C \qquad \text{(i)}$$

unde T'_C este energia cinetica a sistemului material in miscarea in jurul centrului de greutate (inertie).
In miscarea solidului rigid in jurul unei axe fixe Δ cu viteza unghiulara ω energia cinetica este:

$$T = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \qquad \text{(ii)}$$

avem deci:

$$T = \frac{1}{2} m v_C{}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \dot{\varphi}^2, \quad I_{Cz} = \frac{ml^2}{3}$$

Consideram: $P = mg, \;\; x_C = a\cos\varphi, \;\; y_C = a\sin\varphi$ si obtinem:

(iii)

$$T = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\varphi}^2 \qquad \text{(iv)}$$

Exprimam lucrul mecanic tinand cont ca reactiunile normale sunt perpendiculare pe deplasari, $\delta L^{(ext)} = -dV$:

$$\delta L^{(ext)} = \vec{P} \cdot d\overrightarrow{OC} + \underbrace{\vec{N}_A \cdot d\overrightarrow{OA}}_{=0} + \underbrace{\vec{N}_B \cdot d\overrightarrow{OB}}_{=0} = -mgdy_C$$

$$\vec{P} = -gradV \;\Rightarrow -mg = \frac{dV}{dy_C} \;\Rightarrow V = mgy_C = mga\sin\varphi$$

Din teorema conservarii energiei , T+V=h, avem:

$$T + V = \frac{2}{3}ma^2\dot{\varphi}^2 + mga\sin\varphi = h$$

Constant h se determina din conditiile initiale si relatia de mai sus devine:

$$\frac{2}{3}ma^2\dot{\varphi}^2 + mga\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right) = 0 \qquad \text{(v)}$$

Avem:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{a}\left(\sin\varphi_0 - \sin\varphi\right) \qquad \text{(vi)}$$

iar prin derivare obtinem ecuatia diferentiala ce ne da viteza unghiulara ω =dφ/dt.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4a}\cos\varphi, \;\; \varphi(0) = \varphi_0, \;\; \dot{\varphi}(0) = 0 \qquad \text{(vii)}$$

Pentru a gasi reactiunile normale scriem ecuatia de miscare a centrului de masa:

$$m\vec{a}_C = \vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{P} \qquad \text{(viii)}$$

care in proiectie pe axe devine:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = N_A \\ m\ddot{y}_C = N_B - mg \end{cases} \qquad \text{(ix)}$$

Momente de inertie

Folosind (iii), (vi) si (vii) in (ix) obtinem:

$$N_A = \frac{3}{4} P \cos\varphi \left(3\sin\varphi - 2\sin\varphi_0\right) \qquad \text{(x)}$$

$$N_B = \frac{mg}{4} \left(1 + 9\sin^2\varphi - 6\sin\varphi \sin\varphi_0\right) \qquad \text{(xi)}$$

Bara se desprinde de la perete atunci cand $N_A = 0$ si din (x) obtinem:

$$\varphi_{\text{desprindere}} = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\varphi_0\right) \qquad \text{(xii)}$$