Dinamica sistemelor de puncte materiale

Definitie: Prin ***sistem material*** (notat S) intelegem o multime finita de puncte materiale (centre de masa ale unor corpuri) afate in interactiune (micarea fiecarui punct depinde de miscarea celorlalte puncte).

Sistem material: **- discret** – alcatuit dintr-un numar finit de puncte materiale izolate
- continuu (rigid) – alcatuit dintr-un numar infinit de puncte materiale ce ocupa un domeniu, D inclus in $\mathbf{R}^3$

Sistem material: **- liber** – punctele pot ocupa orice pozitie in spatiu
- legate – punctele sunt obligate sa indeplineasca anumite restrictii geometrice sau cinematice

Forte: Intr-un sistem material (S) actioneaza **forte exterioare** care provin din afara sistemului (ex: atractie gravitationala) si **forte interioare** care provin de la punctele ce alcatuiesc sistemul (S).

Ex: Soarele si planetele formeaza un sistem de puncte materiale. Planetele si soarele sunt puncte interne ale lui (S), iar celelalte corpuri ceresti sunt puncte exterioare.

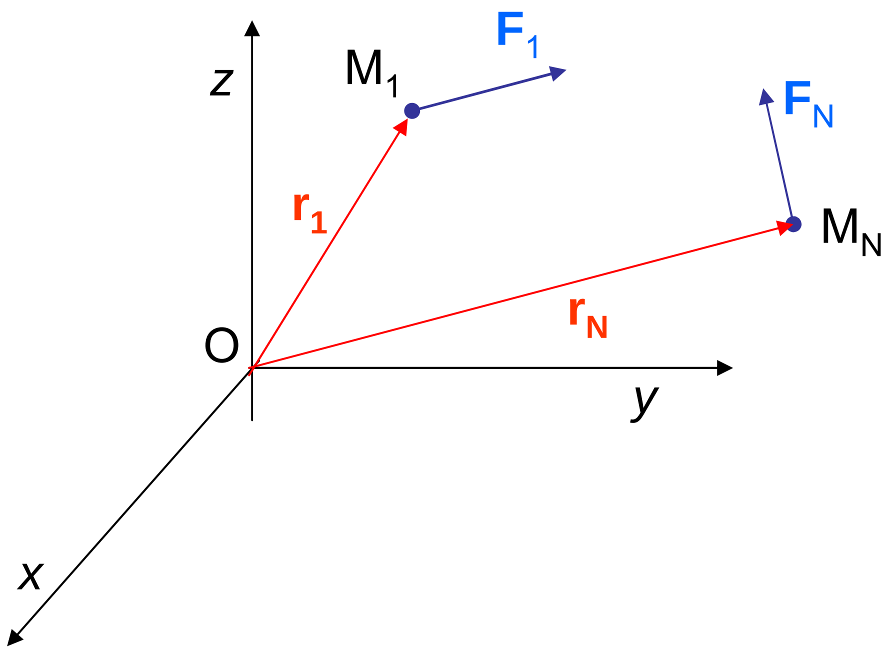
Dinamica punctului material supus la legaturi

Fie S un sistem material discret alcatuit din N puncte materiale M_i ale caror pozitii fata de un reper inertial $Oxyz$ sunt indicate de vectorii

$$\mathbf{r}_i\,, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Pentru a cunoaste miscarea sistemului de puncte materiale trebuie sa determinam:

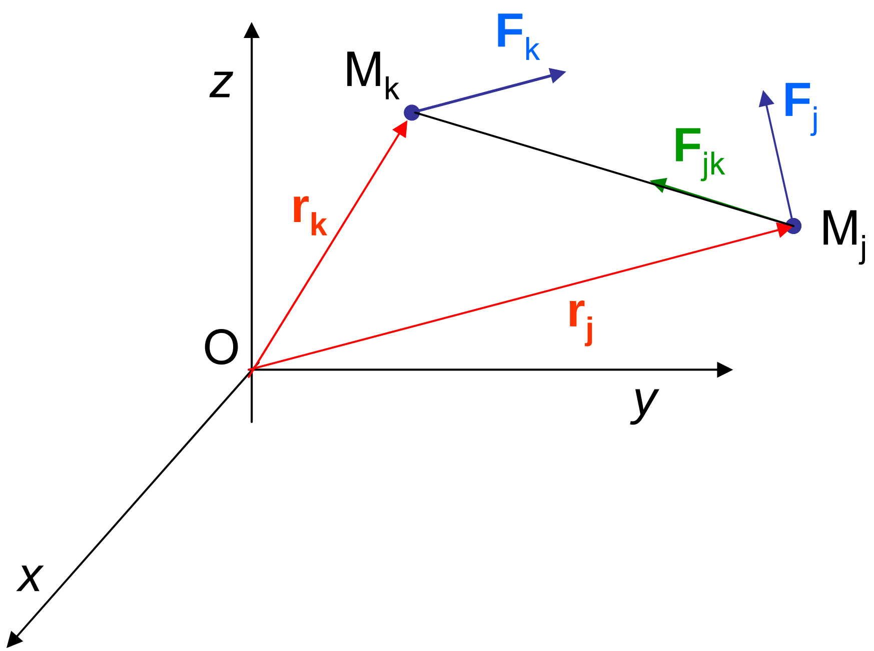
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \quad i = 1, \ldots, N$$



Dinamica punctului material supus la legaturi

Fie:

- m_k masa punctului M_k,
- $\mathbf{F}_k$ rezultanta fortelor exterioare aplicate punctului M_k
- $\mathbf{F}_{kj}$ forta interioara pe care punctul M_j o exercita asupra punctului M_k,
  $k, j = 1,..., N$; $k \neq j$



Asupra punctului M_j actioneaza forta rezultanta:

$$\vec{F}_j + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk} \qquad (1)$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Proprietati ale fortelor interioare

1. Fortele interioare sunt supuse principiului actiunii si reactiunii:

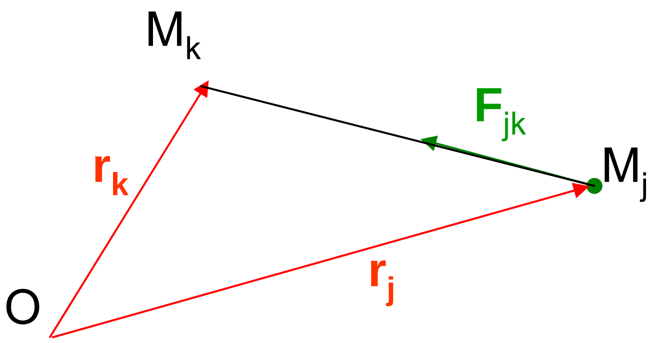
$$\vec{F}_{jk} + \vec{F}_{kj} = 0, \quad j,k = 1,\dots,N$$

$$\vec{F}_{jj} = 0, \quad j = 1,\dots,N \qquad (2)$$

De asemenea:

$$\vec{F}_{jk} \parallel \vec{r}_j - \vec{r}_k \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{jk} = F_{jk} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|} \qquad (2')$$



Dinamica punctului material supus la legaturi

2. Rezultanta generala a fortelor interioare, **R**$^{(i)}$, si momentul rezultant al fortelor interioare, $M_O^{(i)}$, (O arbitrar in spatiu) sunt nule:

$$\vec{R}^{(i)} = 0, \quad M_O{}^{(i)} = 0 \qquad (3)$$

Intr-adevar:

$$\vec{R}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{jk}\right) = \sum_{j,k=1}^{N}\vec{F}_{jk} \underset{\vec{F}_{jk}+\vec{F}_{kj}=0}{=} 0 \qquad (4)$$

Pentru punctele M_k si M_j ($k \neq j$) *avem:*

$$\underbrace{\vec{r}_j \times \vec{F}_{jk}}_{\vec{M}_j} + \underbrace{\vec{r}_k \times \vec{F}_{kj}}_{\vec{M}_k} \underset{(2)}{=} \left(\vec{r}_j - \vec{r}_k\right) \times \vec{F}_{jk} \underset{(2')}{=} 0$$

Deci:

$$\vec{M}_O{}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_j \times \vec{F}_{jk} = 0 \qquad (5)$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Ecuatiile diferentiale ale miscarii

Ecuatiile diferentiale ale miscarii sistemului (S) sunt:

$$m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \vec{F}_j + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk}, \qquad j = 1,\ldots,N \tag{6}$$

Problema fundamentala a mecanicii sistemului (S) consta in determinarea miscarii punctelor M_j din (S), adica a functiilor: $\vec{r}_j = \vec{r}_j(t), \quad j = 1,\ldots,N$

cunoscand fortele ce actioneaza asupra sistemului ($\mathbf{F}_j$, $\mathbf{F}_{kj}$) si conditiile initiale:

$$\vec{r}_j(t_0) = \vec{r}_j^{\,0}, \;\; \dot{\vec{r}}_j(t_0) = \dot{\vec{r}}_j^{\,0} \quad j = 1,\ldots,N \tag{7}$$

Rezolvand (6) cu conditiile (7) obtinem ecuatiile miscarii:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(t, \vec{r}_1^{\,0},\ldots,\vec{r}_N^{\,0}, \dot{\vec{r}}_1^{\,0},\ldots,\dot{\vec{r}}_N^{\,0}), \qquad j = 1,\ldots,N \tag{8}$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Teoremele generale ale dinamicii sistemelor materiale

Ne referim in continuare la sisteme materiale discrete. Fie

(S): $M_j(m_j)$, $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{F}_j$, $j = 1,\ldots, N$

Miscarea este data de:

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk}, \qquad j = 1,\ldots, N \tag{9}$$

1. Teorema impulsului (a cantitatii de miscare)

Definitie: Impulsul **H** al sistemului (S) sau cantitatea de miscare este suma tuturor impulsurilor punctelor materiale:

$$\boxed{\vec{H} = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\vec{r}}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j} \tag{10}$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Din (9) si (10) avem:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j}_{=\vec{R}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk}}_{\underset{(4)}{=} 0} \qquad (11)$$

unde **R** este rezultanta fortelor externe ce actioneaza asupra punctelor din sistem.
Asadar:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{R} \qquad (12)$$

Ecuatia (12) exprima teorema impulsului:

„Miscarea sistemului (S) are loc astfel incat in orice moment derivata in raport cu timpul a impulsului sistemului este egala cu rezultanta fortelor exterioare.“

Dinamica punctului material supus la legaturi

Integrale prime

Definitie: O relatie de forma:

$$\mathcal{F}(t,\vec{r}_1^{\,0},\ldots,\vec{r}_N^{\,0},\dot{\vec{r}}_1^{\,0},\ldots,\dot{\vec{r}}_N^{\,0}) = c(\text{constant}), \quad \forall t \geq t_0$$

in care functia $\mathcal{F}$ de clasa C^1 este identic egala cu o constanta daca $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(t)$, $i = 1,\ldots N$, satisfac ecuatia diferentiala (9) se numeste <u>integrala prima a miscarii</u>.
Obs: O integrala prima poate inlocui o relatie din sistemul (9).

Cazul 1. Daca: $$\vec{R} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{H} = \text{constant} \tag{13}$$

Ecuatia (13) exprima principiul conservarii impulsului sistemului (S):

„Daca rezultanta fortelor exterioare sistemului este nula atunci impulsul sistemului se conserva in timp.“

Dinamica punctului material supus la legaturi

Cazul 2. Daca **R** ≠ 0, dar exista un versor fix **u** astefel incat **R · u** = 0 (**R** ⊥ **u**) atunci din (12) avem:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{R}\,\Big|\cdot \vec{u} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\vec{H}\cdot\vec{u}\right) = \vec{R}\cdot\vec{u} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\vec{H}\cdot\vec{u} = \text{constant}, \quad \forall\ t \geq t_0 \qquad (14)$$

2. Teorema centrului maselor

Definitie: Punctul C al carui vector de pozitie in raport cu Oxyz este definit de relatia:

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad (15)$$

se numeste centrul maselor (centrul de inertie, centrul de greutate) sistemului (S).

Dinamica punctului material supus la legaturi

Precizam ca m = Σ m_i reprezinta masa totala a sistemului (S).
Derivand (15) avem:

$$m\dot{\vec{r}}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{H} \qquad (16)$$

si folosind teorema impulsului (12) obtinem:

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \vec{R} \qquad (17)$$

<u>Teorema centrului maselor:</u>
Centrul maselor unui sistem de puncte materiale se misca asemenea unui punct material in care este concentrata intreaga masa a sistemului si asupra caruia actioneaza rezultanta fortelor exterioare aplicate sistemului.

In coordonate carteziene daca $\mathbf{r_C}(x_C, y_C, z_C)$ si $\mathbf{R}(X,Y,Z)$ avem:

$$m\ddot{x}_C = X,\ \ m\ddot{y}_C = Y,\ \ m\ddot{z}_C = Z \qquad (18)$$

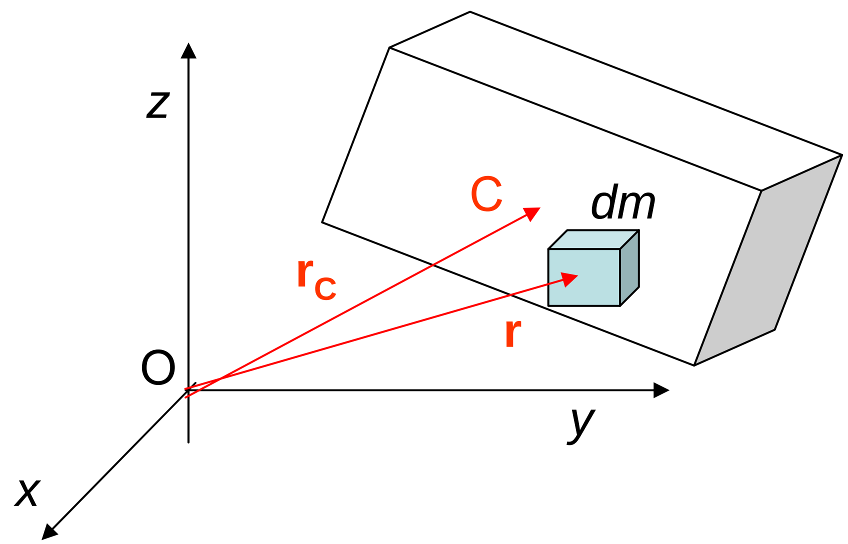
Dinamica punctului material supus la legaturi

Observatie: Fie (S) un corp rigid de masa m. Atunci:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_{(S)} \vec{r}\, dm = \frac{1}{m}\int_{(S)} \rho\, \vec{r}\, dv$$

este vectorul de pozitie al centrului maselor sistemului (S).

Deoarece fortele interne satisfac principiul actiunii si reactiunii atunci teorema centrului maselor ramane valabila si pentru corpuri rigide. Conform acestui rezultat asimilam miscarea unui corp rigid cu miscarea unui punct material, centrul de masa.



Dinamica punctului material supus la legaturi

3. Teorema momentului cinetic

Definitie: Momentul cinetic **K$_O$** al sistemului (S) in raport cu punctul O este suma momentelor cinetice ale punctelor sistemului:

$$\boxed{\vec{K}_O = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j} \qquad (19)$$

Derivand **K$_O$** in raport cu timpul si utilizand (9) obtinem:

$$\dot{\vec{K}}_O = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \dot{\vec{r}}_j \times m_j \vec{v}_j}_{=0} + \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times m_j \dot{\vec{v}}_j \underset{(9)}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_j + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_j \times \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk} \right)}_{\underset{(5)}{=} \vec{M}_O = 0} \qquad (20)$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Avem:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_j \underset{\text{notatie}}{=} \vec{M}_O \qquad (21)$$

unde M_O este momentul rezultant al fortelor externe.

Relatia:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O \qquad (22)$$

exprima teorema momentului cinetic: „Miscarea unui sistem material are loc astfel incat in orice moment derivata in raport cu timpul a momentului cinetic al sistemului este egala cu momentul rezultant al fortelor exterioare sistemului"

Integrale prime

Daca $\mathbf{M}_O$ = 0 atunci din (22) avem :

$$\vec{K}_O = \text{constant} \qquad (23)$$

Relatia (23) exprima conservarea momentului cinetic.

Dinamica punctului material supus la legaturi

4. Teorema energiei cinetice

Definitie: Numimenergie cinetica a sistemului (S)marimea scalara:

$$\boxed{T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v_j{}^2} \tag{24}$$

Fie $\delta L^{(ext)}$ si $\delta L^{(int)}$ lucrul mecanic elementar al fortelor exterioare si al fortelor interioare. Deci:

$$\delta L^{(\mathrm{ext})}=\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j d\vec{r}_j;\quad \delta L^{(\mathrm{int})}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\underline{k}=1}^{N}\vec{F}_{jk} d\vec{r}_j \tag{25}$$

Fie $M_j\,(m_j)$ punct al sistemului. Scriind energia sa cinetica si teorema energiei cinetice avem:

$$dT_j=d\left(\frac{1}{2}m_j v_j{}^2\right)=\vec{F}_j d\,\vec{r}+\left(\sum_{\underline{k}=1}^{N}\vec{F}_{jk}\right)d\,\vec{r}_j,\qquad \forall\ j=1,\dots,N \tag{26}$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Insumand (26) dupa *j* obtinem <u>teorema energiei cinetice:</u>

$$dT = \delta L^{(\mathrm{ext})} + \delta L^{(\mathrm{int})} \tag{27}$$

<u>Teorema energiei cinetice</u>
„In orice pozitie a sistemului diferentiala energiei cinetice este egala cu suma dintre lucrul mecanic elementar si al fortelor externe si lucrul mecanic elementar al fortelor interne.“

5. Teorema de conservare a energiei mecanice

Daca exista o functie de stare

$$V^{(\mathrm{int})} = V^{(\mathrm{int})}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)$$

numita <u>energie potentiala interna a sistemului</u>, astfel incat

$$\delta L^{(\mathrm{int})} = -dV^{(\mathrm{int})} \tag{28}$$

atunci (27) devine:

$$d\left(T + V^{(\mathrm{int})}\right) = \delta L^{(\mathrm{ext})} \tag{29}$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

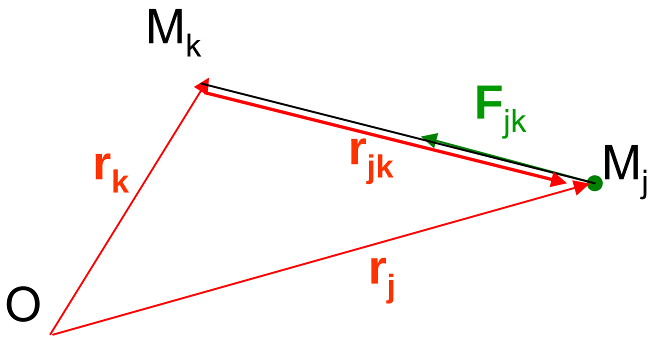
Daca fortele interne depind doar de pozitie, adica $\mathbf{F}_{jk} = \mathbf{F}_{jk}(\mathbf{r}_{jk})$ atunci

$$F_{jk} \cdot dr_{jk} = -dV_{jk}^{(\mathrm{int})}, \ \Rightarrow V_{jk}^{(\mathrm{int})} = -\int F_{jk} dr_{jk} \qquad (30)$$

Dar

$$\delta L_{jk}^{(\mathrm{int})} = \vec{F}_{jk} \cdot d\,\vec{r}_j + \vec{F}_{kj} \cdot d\,\vec{r}_k \underset{\vec{F}_{jk}=-\vec{F}_{kj}}{=} \vec{F}_{jk} \cdot d\,(\vec{r}_j - \vec{r}_k) =$$

$$= \vec{F}_{jk} \cdot d\,\vec{r}_{jk} = F_{jk}\vec{u} \cdot d(r_{jk}\vec{u}) = F_{jk}\frac{1}{2}d(r_{jk}\vec{u} \cdot \vec{u}) = F_{jk}dr_{jk}$$



Dinamica punctului material supus la legaturi

Atunci

$$\delta L^{(\text{int})} = \sum_{j,k=1}^{N} \vec{F}_{jk} \cdot d\,\vec{r}_j = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{N} F_{jk}\, dr_{jk} = -dV^{(\text{int})} \qquad (30')$$

unde

$$V^{(\text{int})} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{N} V_{jk}^{(\text{int})} \qquad (31)$$

Daca exista o functie de stare

$$V^{(\text{ext})} = V^{(\text{ext})}(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)$$

numita energie potentiala externa a sistemului, astfel incat

$$\delta L^{(\text{ext})} = -dV^{(\text{ext})} \qquad (32)$$

atunci (29) devine:

$$d\left(T + V^{(\text{ext})} + V^{(\text{int})}\right) = 0$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Si deci

$$T + V^{(\mathrm{ext})} + V^{(\mathrm{int})} = h(\mathrm{constant}) \qquad (33)$$

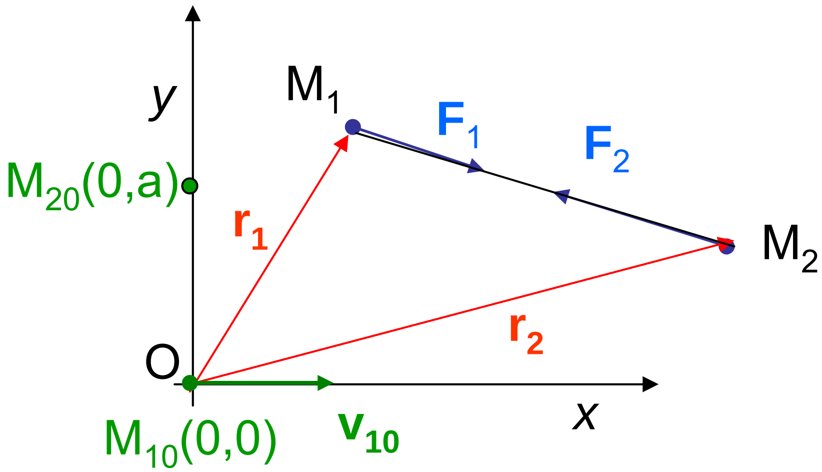
Ecuatia (33) exprima teorema de conservare a energiei mecanice:

„Miscarea unui sistem de puncte materiale intr-un camp conservativ de forte (fortele externe si interne sunt potentiale) are loc astfel incat energia mecanica totala $E = T + V^{(\mathrm{ext})} + V^{(\mathrm{int})}$ se conserva in timpul miscarii sistemului."

Dinamica punctului material supus la legaturi

Exemplul 1:

Doua puncte materiale M_1 si M_2 cu masele egale cu unitatea se atrag cu o forta egala cu distanta dintre ele coeficientul de proportionalitate fiind 1. In momentul initial punctul M_1 se afla in originea axelor de coordonate si are viteza $v_1 = a\sqrt{2}$, fiind dirijat pe axa Ox, iar M_2 este pe axa Oy avand viteza $v_2 = 0$ si ordonata *a.* Sa se determine ecuatiile de miscare pentru sistemul format din M_1 si M_2.



Observatie:

Miscarea este plana (in Oxy).

Intr-adevar putem considera forta ce actioneaza intre M_1 si M_2 ca fiind centrala (de exemplu centrul este M_2) si atunci conform teoriei fortelor centrale miscarea este plana.

Dinamica punctului material supus la legaturi

Ecuatiile miscarii:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 = \overrightarrow{M_2M_1} = -\overrightarrow{M_1M_2} \end{cases} \qquad (33)$$

Scriem ecuatiile (33) in proiectie pe axele Oxy ($m_1 = m_2 = 1$)si adaugam si conditiile initiale:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = x_2 - x_1; \;\; x_1(0) = 0; \;\; \dot{x}_1(0) = a\sqrt{2} \\ \ddot{y}_1 = y_2 - y_1; \;\; y_1(0) = 0; \;\; \dot{y}_1(0) = 0 \\ \ddot{x}_2 = x_1 - x_2; \;\; x_2(0) = 0; \;\; \dot{x}_2(0) = 0 \\ \ddot{y}_2 = y_1 - y_2; \;\; y_2(0) = a; \;\; \dot{y}_2(0) = 0 \end{cases} \qquad (34)$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Din (34) se obtine:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\left(x_1 + x_2\right) = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\left(x_1 - x_2\right) = -2\left(x_1 - x_2\right) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\left(y_1 + y_2\right) = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\left(y_1 - y_2\right) = -2\left(y_1 - y_2\right) \end{cases} \qquad (35)$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Integrand (35) avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = C_1 t + C_2; \quad x_1 - x_2 = C_5 \cos(\sqrt{2}\,t) + C_6 \sin(\sqrt{2}\,t); \\ y_1 + y_2 = C_3 t + C_4; \quad y_1 - y_2 = C_7 \cos(\sqrt{2}\,t) + C_8 \sin(\sqrt{2}\,t); \end{cases} \tag{36}$$

Folosind conditiile initiale din (34) putem gasi constantele de integrare $C_1, ..., C_8$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a\sqrt{2}\,t; \quad x_1 - x_2 = a \sin(\sqrt{2}\,t); \\ y_1 + y_2 = a; \quad y_1 - y_2 = -a \cos(\sqrt{2}\,t) \end{cases} \tag{37}$$

Dinamica punctului material supus la legaturi

Obtinem:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2}\left[\sqrt{2}\,t + \sin(\sqrt{2}\,t)\right] \\ y_1 = \dfrac{a}{2}\left[1 - \cos(\sqrt{2}\,t)\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a}{2}\left[\sqrt{2}\,t - \sin(\sqrt{2}\,t)\right] \\ y_2 = \dfrac{a}{2}\left[1 + \cos(\sqrt{2}\,t)\right] \end{cases} \tag{38}$$

Ecuatiile (38) reprezinta doua cicloide formate din doua puncte diametral opuse ale unui cerc care se rostogoleste pe dreapta y = a.

Dinamica punctului material supus la legaturi