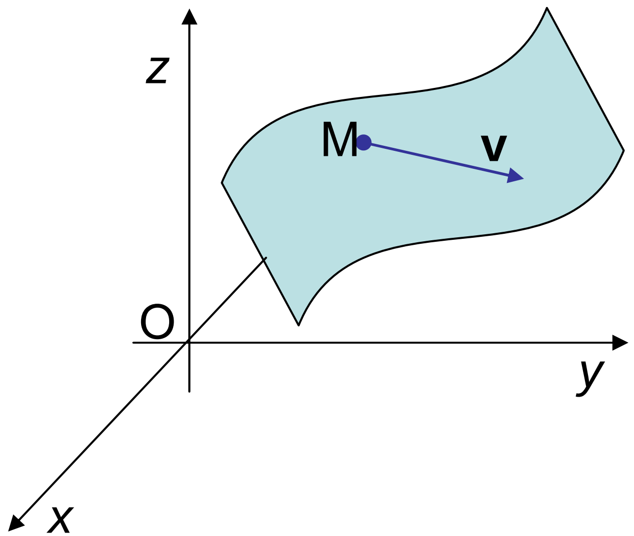
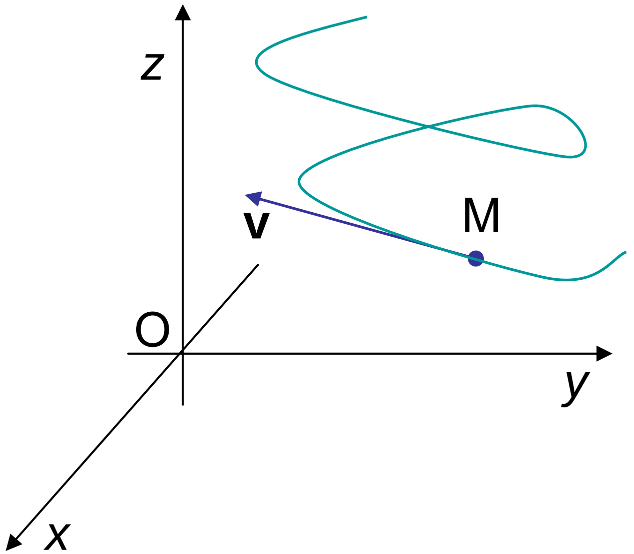
# Dinamica punctului material supus la legaturi

Am studiat miscarea punctului material liber, adica miscarea punctului material numai sub actiunea fortelor exterioare direct aplicate. Exista situatii in care punctul material este obligat sa ramana pe o anumita varietate **(curba** sau **suprafata).**




I. Pe suprafata. Coordonatele punctului trebuie sa satisfaca **ecuatia suprafetei:**

$$h(t, \vec{r}) = 0 \tag{1}$$

## Dinamica punctului material supus la legaturi

II. Pe curba. Coordonatele punctului trebuie sa satisfaca **ecuatia curbei** care este data de intersectia a doua suprafete:

$$\begin{cases} h_1(t,\vec{r}) = 0 \\ h_2(t,\vec{r}) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

In ambele cazuri spunem ca punctul material este supus unor legaturi geometrice.

Definitie:

Numim **legatura** orice restrictie de natura geometrica (impusa pozitiei punctului) sau cinematica (impusa vitezei punctului) impusa punctului material aflat in miscare.

O **legatura geometrica** este o restrictie asupra pozitiei punctului, o relatie intre coordonatele depozitie ale punctului si eventual timpul t.

O **legatura cinematica** este o restrictie asupra vitezei punctului, o relatie intre coordonatele depozitie si de viteza ale punctului material si eventual timpul t.

Miscarea punctului material M(m) pe o varietate tridimensionala Σ (curba sau suprafata) reprezinta un sistem material in interactiune, varietatea actionand asupra punctului care are tendinta sa o paraseasca.

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Postulatul lui Cauchy: Exista o forta **R** a carei actiune asupra punctului material este perfect echivalenta cu actiunea varietatii Σ in sensul ca, daca pe langa fortele direct aplicate punctului material adaugam si forta **R**, atunci punctul se poate considera eliberat de legaturi (adica s-ar misca ca si cand ar fi liber).

Postulatul lui Cauchy se mai numeste si principiul eliberarii punctului material de legaturi.

Conform acestui principiu ecuatia diferentiala a miscarii punctului material este:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \tag{3}$$

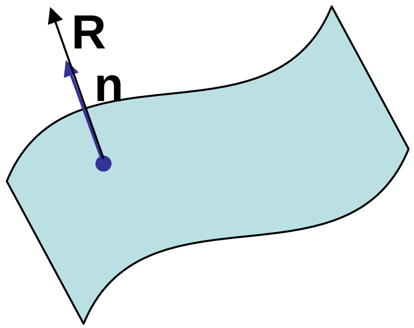
$\vec{F}$ - este forta sau rezultanta fortelor direct aplicate punctului material (forta data)

$\vec{R}$ - este forta necunoscuta care trebuie determinata odata cu miscarea si care se numeste forta de legatura sau reactiunea legaturii. Ea depinde de natura varietatii considerate.

## Dinamica punctului material supus la legaturi

Spunem ca o varietate (curba sau suprafata) este perfect neteda (perfect lucioasa) daca ea nu se opune alunecarii punctului material pe ea si deci forta **R** are doar o componenta normala la varietate, nu si una tangentiala.

Asadar in cazul unei varietati perfect netede (numita si <u>legatura ideala</u>) reactiunea **R** este paralela cu normala **n** la varietate, adica **R** II **n**.

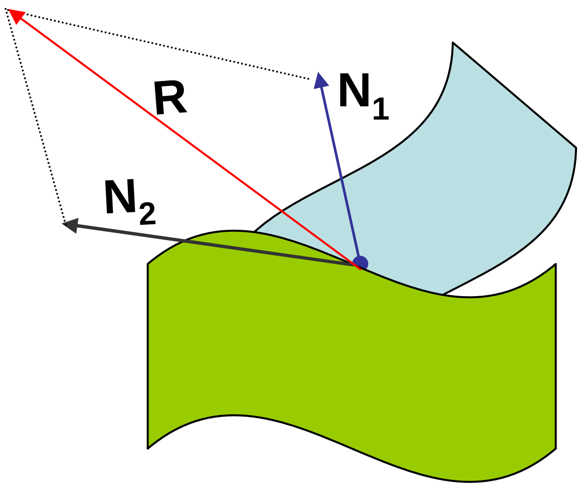



In cazul in care varietatea este o suprafata data de ecuatia (1) atunci:

$$\vec{R} = \lambda \, grad \, h \qquad (4)$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Daca punctul material se misca pe o curba data de ecuatiile (2) atunci reactiunea normala **R** este data de:

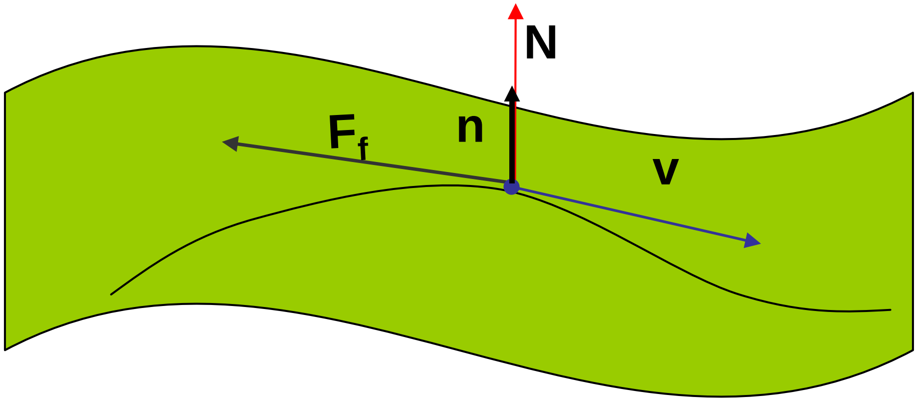



$$\vec{R} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \lambda_1 \, grad \, h_1 + \lambda_2 \, grad \, h_2 \qquad (5)$$

Miscarea punctului material pe o varietate perfect neteda se numeste <u>miscare fara frecare</u>

# Dinamica punctului material supus la legaturi

In realitate, pentru o varietate reala reactiunea **R** are atat o componenta normala cat si o componenta tangentiala, componenta tangentiala opunandu-se alunecarii punctului pe varietate.




Pe o varietate reala (in cazul miscarii reale) avem:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_f \tag{6}$$

Unde **N** este reactiunea normala coliniara cu normala la varietate (cu **n**), iar $\mathbf{F_f}$ este reactiunea tangentiala care se opune alunecarii punctului pe varietate si se numeste <u>forta de frecare</u>.

Asadar ecuatia de miscare a punctului material pe o varietate este:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$$

(miscare fara frecare)

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f$$

(miscare cu frecare)

# Dinamica punctului material supus la legaturi

**Miscarea punctului material pe o curba fixa de clasa C¹**

Fie M(m) un punct material obligat sa se miste pe curba:

$$(C):\begin{cases} h_1(x,y,z)=0 \\ h_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{7}$$

Ecuatia diferentiala a miscarii este:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_f=\vec{F}+\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{F}_f \tag{8}$$

unde

$\vec{F}$ este forta direct aplicata

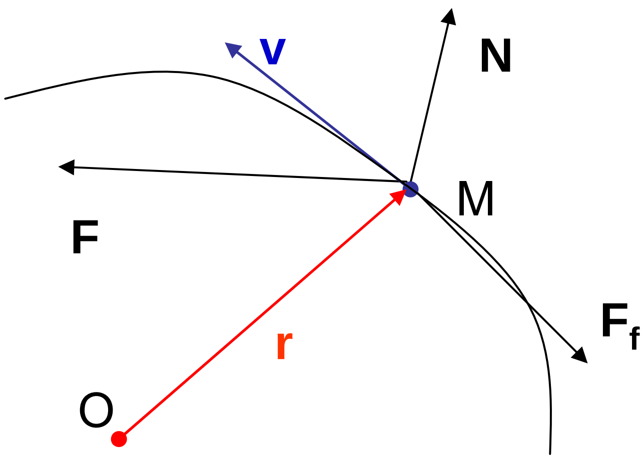
$\vec{N}=\vec{N}_1+\vec{N}_2=\lambda_1\, grad\, h_1+\lambda_2\, grad\, h_2$ este reactiunea normala la curba iar $\lambda_1$, $\lambda_2$ sunt constante reale necunoscute

$\vec{F}_f$ este forta de frecare

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Forta de frecare este coliniara cu tangenta la curba in punctul M, insa de sens contrar vitzei punctului M (se opune miscarii):

$$\vec{F}_f = -F_f \frac{\vec{v}}{v} \tag{9}$$




Marimea fortei de frecare este data de legea lui Coulomb:

$$F_f = k\,N \tag{10}$$

unde k > 0 este coeficientul de frecare specific curbei (sau suprafetei), iar *N este* modulul reactiunii normale **N**.

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Pentru a rezolva ecuatia (8) avem nevoie de conditiile initiale:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

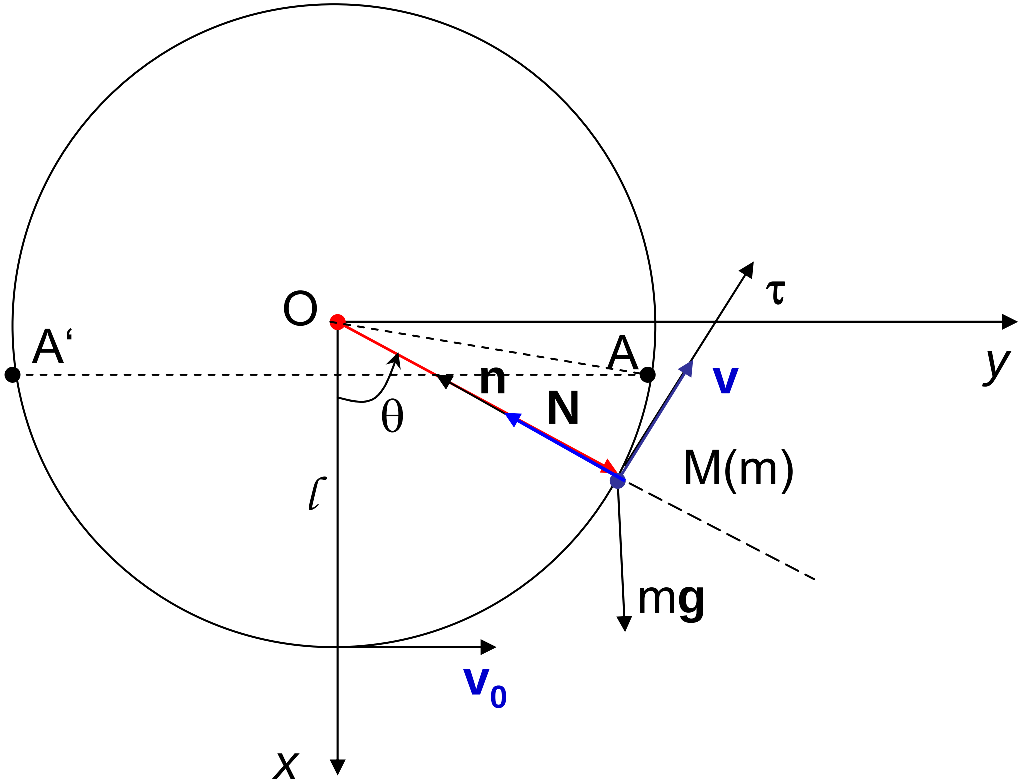
$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$$

si de ecuatiile legaturilor, ecuatiile (7).

**Pendulul matematic**

Definitie: Numim pendul matematic un punct material greu aflat in miscare pe un cerc de raza $\ell$ dintr-un plan vertical.

Admitem ca aceasta miscare se face fara frecare.




Ecuatia miscarii:

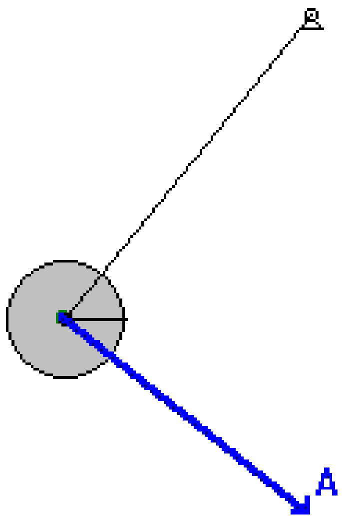
$$\theta = \theta(t), \quad t \in [0, T] \tag{11}$$

adica miscarea depinde doar de un singur parametru, de unghiul $\theta$.

Ecuatia diferentiala a miscarii este:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} \tag{12}$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi




Adaugam conditiile initiale. Presupunem ca miscarea incepe de pe axa Ox cu viteza $\mathbf{v}_0$ perpendiculara pe aza cercului. Asadar:

$$\theta(0) = 0 \qquad (13)$$

$$v(0) = v_0 \quad (\vec{v}_o \perp Ox)$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Proiectam ecuatia (12) pe tangenta si pe normala principala:

$$\left( \vec{a} = a_n \vec{n} + a_\tau \vec{\tau} = \frac{v^2}{l} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \right)$$

$$\begin{cases} \vec{n}: \quad m \dfrac{v^2}{l} = N - mg\cos\theta & (14) \\ \vec{\tau}: \quad m \dfrac{dv}{dt} = -mg\sin\theta & (15) \end{cases}$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Din ecuatia (14) avem:

$$N = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta \qquad (16)$$

Tinem cont de faptul ca in miscarea circulara: $v = l\dot{\theta}$ si (15) devine:

$$\frac{d(l\dot{\theta})}{dt} = -mg\sin\theta$$

adica

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (17)$$

la care adaugam conditiile initiale:

$$\theta(0) = 0$$
$$\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{l} \qquad (18)$$

**Cazul I.** Daca oscilatiile sunt mici atunci putem face aproximarea: $\sin\theta \approx \theta$
iar ecuatia (17) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{19}$$

Ecuatia (19) este o ecuatie diferentiala de ordinul II, omogena si are o solutie generala de forma:

$$\theta(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \tag{20}$$

unde constantele $C_1$ si $C_2$ se obtin din conditiile initiale. Se observa ca miscarea este periodica de perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{21}$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

**Cazul II.** Daca oscilatiile sunt mari tinem cont de faptul ca m**g** este conservativa, adica exista V astfel incat:

$$m\vec{g} = -gradV \;\Rightarrow\; mg = -\frac{dV}{dx} \;\Rightarrow V = -mgx$$

Exprimam lucrul mecanic elementar:

$$\delta L = m\vec{g}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\vec{N}\cdot d\vec{r}}_{=0\ (\text{pentru ca } \vec{N}\perp d\vec{r})} \underset{\substack{m\vec{g}(mg,0)\\ d\vec{r}(dx,dy)}}{=} mgdx = -dV$$

Asadar

$$dT = \delta L = -dV \;\Rightarrow\; d(T+V) = 0 \;\Rightarrow\; T+V = h$$

Obtinem:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx = h$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

unde h este constanta de integrare. Fie A punctul de inaltime maxima ($\mathbf{v}_A = 0$):

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx = \frac{1}{2}m\underbrace{v_A{}^2}_{v_A=0} - mgx_A \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2g(x - x_A) \qquad (22)$$

La momentul t = 0 avem:

$$v_0{}^2 = 2g(l - x_A) \;\Rightarrow\; x_A = l - \frac{v_0{}^2}{2g}$$

Punem conditia ca miscarea sa fie oscilatorie:

$$-l < x_A < l \;\Rightarrow\; -l < l - \frac{v_0{}^2}{2g} < l \;\Rightarrow -2l < -\frac{v_0{}^2}{2g} < 0$$

$$\Rightarrow v_0{}^2 < 4lg \;\Rightarrow v_0 < 2\sqrt{\lg}$$

## Dinamica punctului material supus la legaturi

Fie α unghiul pe care-l face punctul material in pozitia $x_A$. Atunci:

$$
\begin{aligned}
x_A &= l\cos\alpha \\
x &= l\cos\theta
\end{aligned}
\tag{23}
$$

dar $v = l\dot{\theta}$ si din (22) si (23) avem:

$$
l^2\dot{\theta}^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha) \;\Rightarrow\; l\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{2g(\cos\theta - \cos\alpha)} \tag{24}
$$

unde semnul „+“ corespunde cazului in care punctul urca, iar semnul „-“ corespunde cazului in care punctul coboara. Integrand (24) obtinem:

$$
t - t_0 = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\pm\sqrt{(\cos\theta - \cos\alpha)}} \tag{25}
$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Consideram $t_0 = 0$ si $\theta_0 = 0$ si ca miscarea are loc din punctul de minim inspre punctul de maxim (punctul A). Atunci (25) devine:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\alpha)}} \tag{26}$$

Tinem cont ca $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ si (26) devine:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta} \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}} \tag{27}$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Facem in (27) transformarea

$$\sin\varphi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\alpha/2)} \underset{notatie}{=} \frac{1}{k}\sin(\theta/2) \Rightarrow \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{k}\cos\frac{\theta}{2} d\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

si (26) devine:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \underset{notatie}{=} \sqrt{\frac{l}{g}}\underbrace{F(k,\varphi)}_{\substack{\text{integrala eliptica}\\ \text{de speta I}}} \qquad (28)$$

Pentru un sfert de perioada $\theta$ variaza de la 0 la α, deci $\varphi$ variaza de la 0 la $\pi/2$. Atunci:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) \qquad (29)$$

## Dinamica punctului material supus la legaturi

Pentru calculul perioadei T putem dezvolta in serie:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{-1/2} = 1+\frac{k^2}{2}\sin^2\varphi+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}k^{2n}\sin^{2n}\varphi+\ldots$$

In seria de mai sus pastram doar primii doi termeni si atunci perioada devine:

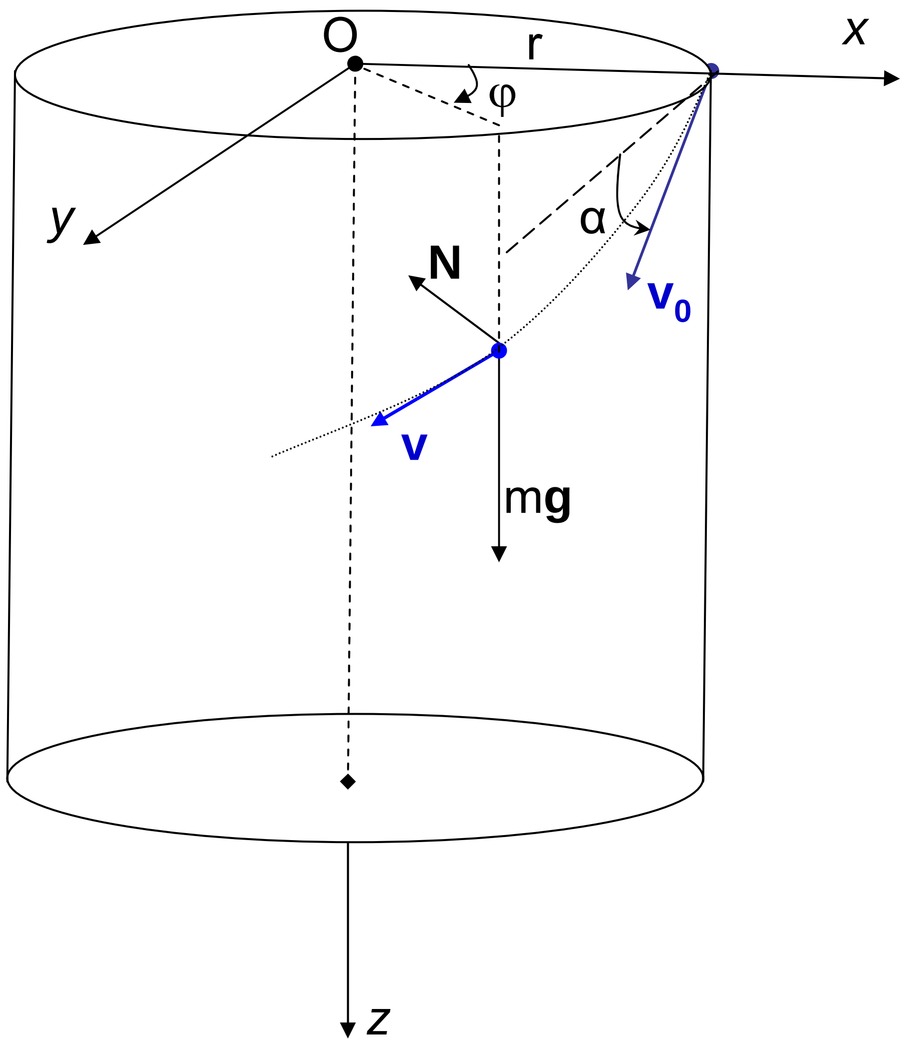
$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}(1+k^2\sin^2\varphi)d\varphi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\frac{\pi}{4}\right) \qquad (30)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{\pi}{4}-\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Daca folosim aproximatia: $\sin^2\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha^2}{4}$ se obtine:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right) \qquad (31)$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi




**Exemplu:**

Un punct material de masa m se misca pe suprafata interioara a unui cilindru circular de raza r. Considerand suprafata cilindrului absolut neteda, axa cilindrului verticala Oz si luand in considerare forta de greutate, sa se determine miscarea punctului si presiunea pe care acesta o exercita asupra cilindrului. La momentul initial viteza punctului care se afla pe axa Ox este $v_0$ si face unghiul α cu orizontala.

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Ecuatia cilindrului: $f(x,y,z)=x^2+y^2-r^2=0$ (32)

Ecuatiile de miscare:

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N} \tag{33}$$

$$\vec{N}=\lambda\, grad\ f=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\lambda(2x,2y,0)$$

In proiectie pe axe avem ecuatiile si conditiile initiale:

$$\begin{cases} Ox:\ m\ddot{x}=2\lambda x\ , & x(0)=r;\ \ \dot{x}(0)=0 \\ Oy:\ m\ddot{y}=2\lambda y\ , & y(0)=0;\ \ \dot{y}(0)=v_0\cos\alpha \\ Oz:\ m\ddot{z}=mg\ , & z(0)=0;\ \ \dot{z}(0)=v_0\sin\alpha \end{cases} \tag{35}$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Din ecuatia (35c) se obtine:

$$\begin{cases} z(t) = \dfrac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \\ z(0) = 0; \;\; \dot{z}(0) = v \end{cases} \Rightarrow \quad z(t) = \frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin\alpha)t \qquad (36)$$

Eliminam λ din ecuatiile (35a) si (35b):

$$\left.\begin{cases} m\ddot{x} = 2\lambda x \big| \cdot y \\ m\ddot{y} = 2\lambda y \big| \cdot x \end{cases}\right| - \;\Rightarrow\; m(\ddot{x}y - x\ddot{y}) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(\dot{x}y - x\dot{y}) = 0$$

$$\Rightarrow \;\; \dot{x}y - x\dot{y} = C_3$$

La t = 0 avem: $C_3 = \dot{x}(0)y(0) - x(0)\dot{y}(0) \underset{(35)}{=} -rv_0 \sin\alpha$

## Dinamica punctului material supus la legaturi

Asadar: $$\dot{x}y - x\dot{y} = -rv_0 \sin\alpha \qquad (37)$$

Pentru a afla pe x si y trecem la coordonate cilindrice (folosim ecuatia de legatura (32) ).

$$x = r\cos\varphi;\quad y = r\sin\varphi;\quad z = z \qquad (38)$$

Inlocuind (38) in (37) avem:

$$-r\dot{\varphi}\sin\varphi \cdot r\sin\varphi - r\cos\varphi \cdot r\dot{\varphi}\cos\varphi = -rv_0\sin\alpha$$

$$\dot{\varphi} = v_0\sin\alpha \;\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi = \left(\dfrac{v_0}{r}\cos\alpha\right)t + C_4 \\ t = 0:\; \varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \left(\dfrac{v_0}{r}\cos\alpha\right)t \qquad (39)$$

# Dinamica punctului material supus la legaturi

Din (38) si (39) putem afla ecuatiile de miscare in pentru coordonatele x si y, acestea adaugandu-i-se ecuatia(36):

$$x = r\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\cos\alpha\right); \quad y = r\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\cos\alpha\right) \tag{40}$$

Pentru a afla normala N trebuie sa calculam valoarea parametrului λ. Din (40a) si (35a) avem:

$$-mr\frac{v_0{}^2\cos^2\alpha}{r^2}\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\cos\alpha\right) = 2\lambda\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\cos\alpha\right)$$

$$\lambda = -\frac{mv_0{}^2\cos^2\alpha}{2r^2} \tag{41}$$

## Dinamica punctului material supus la legaturi

Asadar

$$\vec{N} = -\frac{m{v_0}^2\cos^2\alpha}{2r^2}(2x,2y,0) \qquad (42)$$

iar valoarea absoluta a reactiunii normale este:

$$N = \frac{m{v_0}^2\cos^2\alpha}{r^2}\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r} \Rightarrow N = \frac{m{v_0}^2\cos^2\alpha}{r} \qquad (43)$$