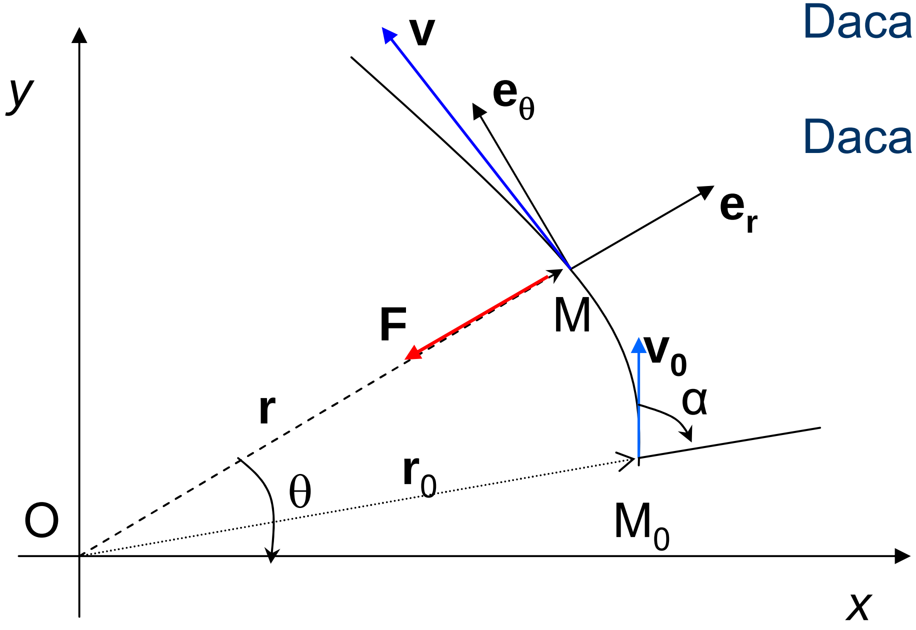
Forte centrale - continuare

Note de curs (in format PDF):
www.math.ubbcluj.ro/~tgrosan/Infostud.htm/Mecanica.htm

Reamintim:

Numim forta centrala o forta **F** a carei directie trece in orice moment printr-un punct fix O, numit centrul fortei.



Daca **F.r** < 0 atunci F se numeste atractiva

Daca **F.r** > 0 atunci F se numeste repulsiva

Forte centrale - continuare

Problema miscarii sub actiunea unei forte centrale se poate reduce la ecuatia lui Binet:

$$-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=\pm F(r,\theta,t) \tag{1}$$

semn „+“ pentru forta repulsiva
semn „–“ pentru forta atractiva

cu conditiile initiale:

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{\substack{t=0\\(\theta=\theta_0)}}=\frac{1}{r_0}; \qquad \left.\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{\substack{t=0\\(\theta=\theta_0)}}=-\frac{1}{r_0}ctg\,\alpha \tag{2}$$

unde c este constanta ariilor:

$$c=r_0{}^2\dot{\theta}_0=r_0v_0\sin\alpha \tag{3}$$

Forte centrale - continuare

Daca forta F depinde doar de raza vectoare r (F = F(r)) atunci ca o alternativa la ecuatia lui Binet se poate aplica teorema energiei:

$$dT = \delta L$$

unde

$$dT = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \frac{F}{r}\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{F}{r} d\left(\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}\right) = F dr$$

Utilizand teorema energiei se obtine:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F\,dr \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2} = \int_{r_0}^{r} F(r)dr$$

Deci

$$\boxed{v^2 = \frac{2}{m}\int F(r)dr + h} \qquad (4)$$

constanta energiei

Forte centrale - continuare

Tinem cont ca:

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\ \dot{r} &= -c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \\ \dot{\theta} &= \frac{c}{r^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v^2 = c^2\left\{\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\}$$

Deci:

$$c^2\left\{\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = \frac{2}{m}\int F(r)dr + h \qquad (5)$$

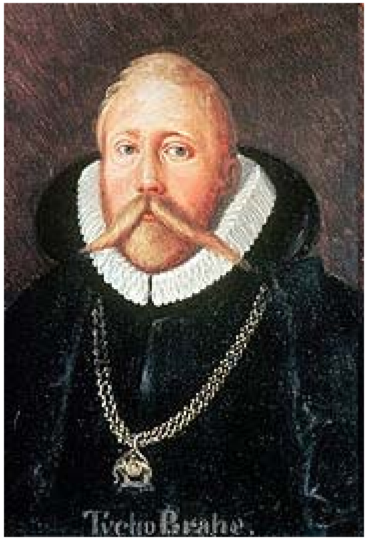
unde h se determina din conditiile initiale: $v_0{}^2 = \frac{2}{m}\int F(r)dr + h$

Legea atractiei universale

Plecand de la observatiile astronomice ale lui Tycho Brahe, Kepler (1596, 1609, 1619) a formulat urmatoarele legi care descriu miscarea oricarei planete in jurul Soarelui:

1. Orice planeta se misca in jurul Soarelui pe o elipsa avand Soarele in focar
2. Planetele descriu arii egale in intervale de timp egale (se respecta legea ariilor)
3. Raportul dintre cubul semiaxei mari si patratul perioadei de miscare pe orbita descrisa de o planeta este constant si acelas pentru toate planetele din Sistemul Solar.

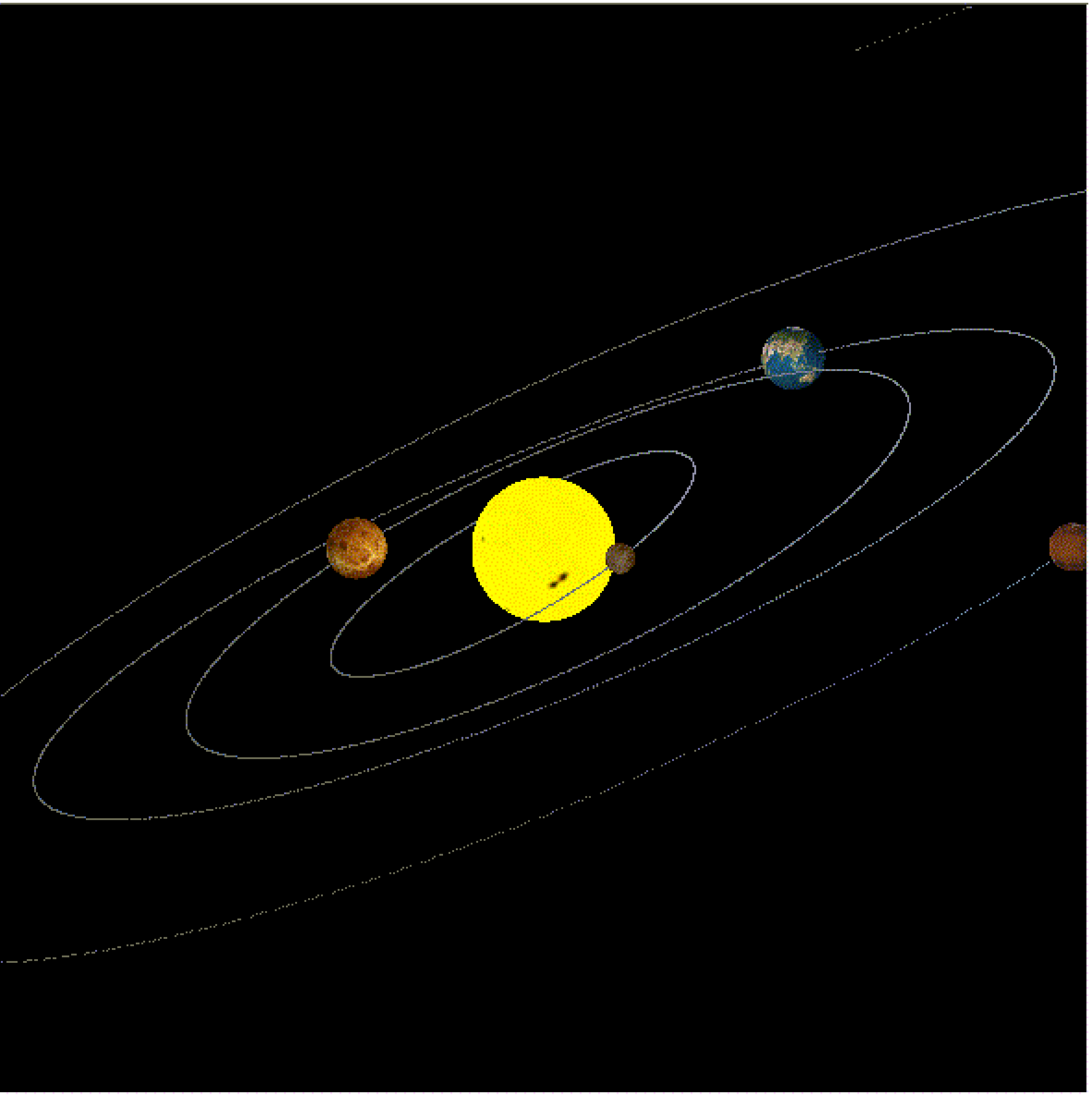
$$a^3/T^2 = \text{constant}$$

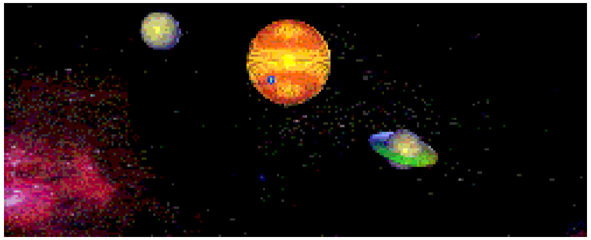


Tycho_Brahe
(1546 - 1601)

Johannes_Kepler
(1571 - 1630)

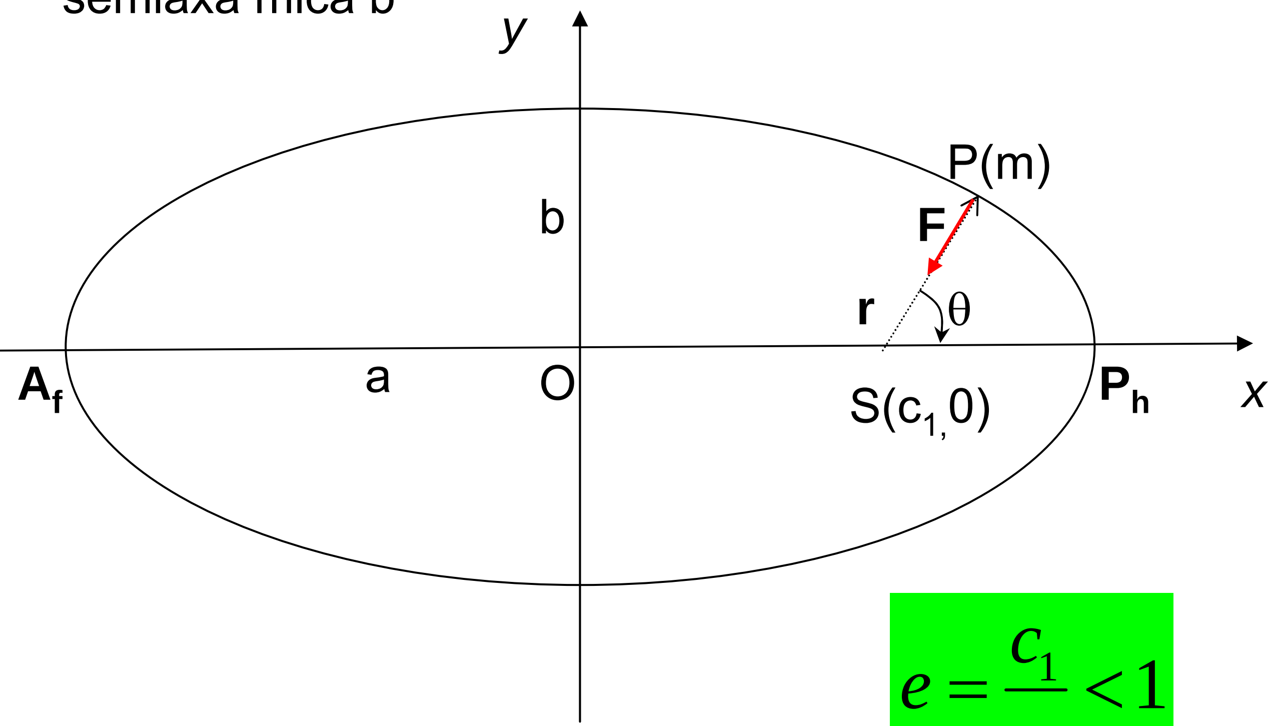
Legea atractiei universale





Legea atractiei universale

Fie P(m) o planeta aflata in miscare in jurul Soarelui, S(M). Planeta si Soarele sunt considerate puncte materiale. Conform primei legi ale lui Kepler consideram ca miscarea lui P(m) are loc pe o elipsa din planul xOy avand semiaxa mare a si semiaxa mica b



Ecuatia traiectoriei descrisa de P(m) in coordonate polare este:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad (6)$$

$$e = \frac{c_1}{a} < 1$$

(excentricitatea elipsei)

$$p = \frac{b^2}{a}$$

(parametrul elipsei)

Legea atractiei universale

Din a doua lege a lui Kepler avem:

$$r^2\dot{\theta} = c \qquad (7)$$

unde *c* este constanta ariilor. Deoarece raza vectoare a lui P(m) parcurge arii egale in intervale de timp egale deducem ca viteza sa in punctul cel mai apropiat de S, P_h, numit **periheliu** trebuie sa fie mai mare decat in punctul cel mai indepartat de S, A_f, numit **afeliu**.

Din (6) avem:

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{p} \quad \text{deci} \quad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{-e\sin\theta}{p}\right)' = \frac{-\cos\theta}{p} \qquad (8a,b)$$

Legea atractiei universale

Admitem ca forta **F** pe care o exercita Soarele S asupra planetei P depinde explicit doar de r. Folosind teorema momentului cinetic

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{M}_o\left(\vec{F}\right)$$

aratam ca **F** este o forta centrala:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\,\vec{k}\right) = \vec{r}\times\vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)}_{\underset{(7)}{=}\ 0}\vec{k} = \vec{r}\times\vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}\times\vec{F} = 0$$

Asadar **F** trece tot timpul prin punctul S, deci este **o forta centrala.**

Legea atractiei universale

Deoarece forta **F** este o forta centrala putem aplica ecuatia lui Binet:

$$-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=F(r) \qquad (9)$$

Folosind (8b) in (9) avem:

$$-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{-e\cos\theta}{p}+\frac{1}{r}\right]=F(r) \qquad (10)$$

Utilizand (8a) in (10) obtinem:

$$F(r)=-\frac{mc^2}{p}\frac{1}{r^2} \qquad (11)$$

Legea atractiei universale

Conform legii a treia a lui Kepler

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{constant} \Rightarrow 4\pi \frac{a^3}{T^2} = \text{constant} \underset{\text{notatie}}{=} \mu \in \Re \qquad (12)$$

Tinand cont ca T este perioada de rotatie a planetei in jurul Soarelui, integrand (7) avem:

$$r^2\dot{\theta} = c \Rightarrow \underbrace{\int_0^{2\pi} r^2(\theta)d\theta}_{=2\times\text{aria elipsei}=2\pi\,\mathrm{a\,b}} = \int_{t_0}^{t_0+T} c\,dt \Rightarrow cT = 2\pi\,\mathrm{a\,b}$$

Obtinem:

$$c = \frac{2\pi\, a\, b}{T} \qquad (13)$$

Legea atractiei universale

Din (11) si (13) avem:

$$F(r) = -\frac{m}{p}\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}\frac{1}{r^2} \tag{14}$$

Tinand cont de (12) ecuatia (14) devine:

$$F(r) = -m\underbrace{\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}}_{\underset{(12)}{=}\mu}\frac{b^2}{ap}\frac{1}{r^2} \underset{p=\frac{b^2}{a}}{=} -\frac{\mu m}{r^2} \tag{15}$$

Ecuatia (15) reprezinta marimea algebrica a fortei exercitata de soarele S asupra planetei P.
Conform principiului actiunii si reactiunii deducem ca si planeta P atrage soarele S cu o forta F_P egala in marime, insa de sens contrar:

Legea atractiei universale

$$F_P = \frac{\mu_P M}{r^2} \tag{16}$$

In relatiile de mai sus sunt prezene marimile:

M = masa Soarelui

m = masa planetei

μ_P= coeficient specific centrului atractiv al planetei

μ = coeficient specific centrului atractiv al Soarelui (e acelasi pentru toate planetele ce orbiteaza in jurul Soarelui)

Asadar:

$$F = F_P \Leftrightarrow \frac{\mu m}{r^2} = \frac{\mu_P M}{r^2} \Leftrightarrow \mu m = \mu_P M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu}{M} = \frac{\mu_P}{m} \underset{notatie}{=} f = \text{constant}$$

e acelasi pentru toate planetele

Legea atractiei universale

Constanta *f* se numeste **constanta atractiei**.

$$f = \frac{\mu}{M} = \frac{\mu_P}{m} \qquad (17)$$

Inlocuind (17) in (15) obtinem **legea atractiei:**

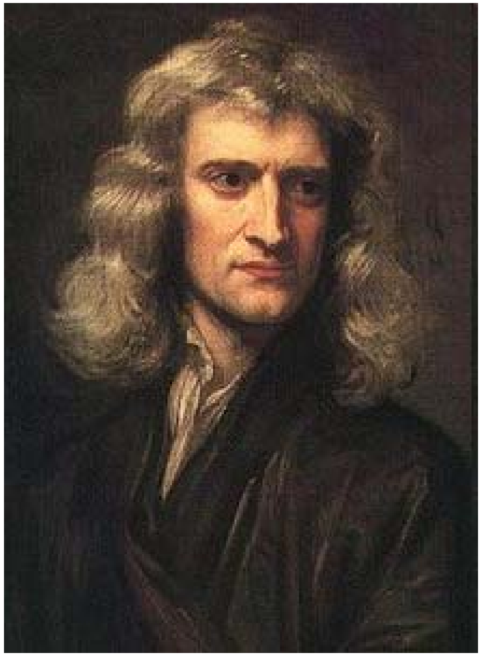
$$F = -f\,\frac{m\,M}{r^2} \quad \text{sau vectorial} \quad \vec{F} = -f\,\frac{m\,M}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \qquad (18)$$

Legea atractiei: Forta de atractie exercitata de Soare in miscarea unei planete in jurul acestuia este direct proportionala cu masa planetei si masa Soarelui si invers proportionala cu patratul distantei dintre Soare si planeta

Legea atractiei universale

S-a dovedit ca aceasta lege este valabila nu numai pentru Sistemul Solar ci pentru toate corpurile din Univers. De aceea lege se numeste **legea atractiei universale.**

Forta F de tipul (15) se numeste **forta newtoniana.**



Isaac Newton
(1642-1727)

Problema lui Newton

Este problema inversa a legii atractiei universale.

Problema lui Newton: Determinarea miscarii unui punct material P(m) sub actiunea unei forte centrale de tip newtonian

$$F(r) = -\frac{\mu m}{r^2} \tag{19}$$

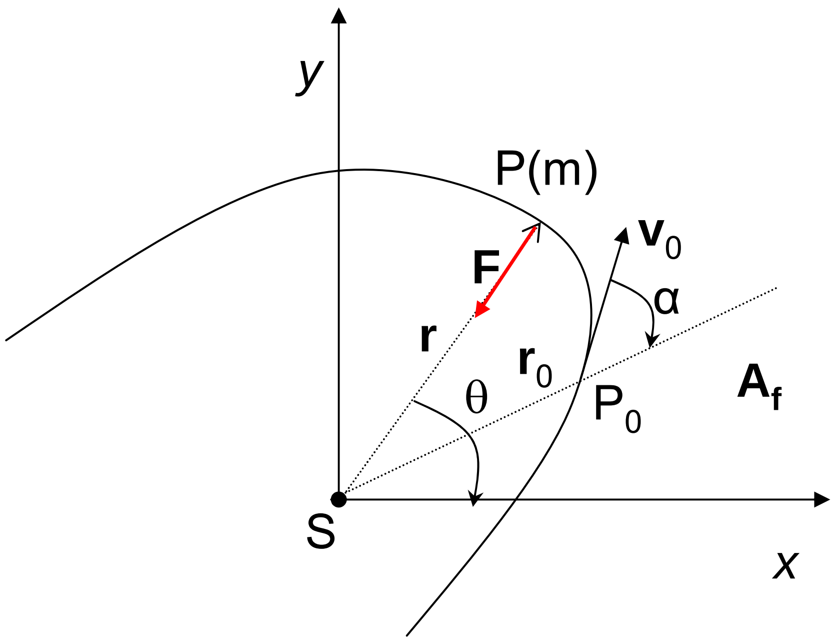
unde $\mu > 0$ este o constanta iar *r este* distanta de la P la centrul atractiv S.
Conform ipotezei forta F este o forta centrala, deci miscarea punctului P(m) este plana si respecta legea ariilor:

$$r^2\dot{\theta} = c \tag{20}$$

Obs.: Aceasta problema intervine in studiul corpurilor ceresti (problema celor doua corpuri), in miscareaelectronului in jurul nucleului atomic, etc.

Vom folosi ecuatia lui Binet pentru a deduce miscarea punctului P in jurul centrului atractiv S.

Problema lui Newton



Din ecuatia lui Binet avem:

$$-\frac{\cancel{m}c^2}{\cancel{r}^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = F \underset{(19)}{=} -\frac{\mu \cancel{m}}{\cancel{r}^2}$$

Problema lui Newton

Obtinem:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{\mu}{c^2} \tag{21}$$

Ecuatia (21) este o ecuatie diferentiala de ordinul 2, liniara si neomogena. Solutia generala a ecuatiei (21) este:

$$\frac{1}{r}=C_1\cos(\theta-\theta_1)+\frac{\mu}{c^2}, \qquad C_1,\ \theta_1\in\Re \tag{22}$$

unde constantele de integrare C_1 si θ_1 se determina din conditiile initiale:

$$r(\theta_0)=r_0; \qquad \left.\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{\substack{t=0\\(\theta=\theta_0)}}=-\frac{1}{r_0}ctg\,\alpha \tag{23}$$

Problema lui Newton

Notand in (22) pe:

$$\frac{\mu}{c^2} \underset{notatie}{=} \frac{1}{p} \Leftrightarrow p = \frac{c^2}{\mu} \quad \text{si} \quad C_1 \underset{notatie}{=} \frac{e}{p} \tag{24}$$

obtinem:

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos(\theta - \theta_1) + \frac{\mu}{c^2} = \frac{e}{p}\cos(\theta - \theta_1) + \frac{1}{p} = \frac{1 + e\cos(\theta - \theta_1)}{p}$$

sau

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_1)}} \tag{25}$$

Ecuatia (25) reprezinta ecuatia unei conice care are focarul in S, iar axa focala face unghiul θ_1 cu axa polara. Parametrul p este **parametrul conicei**, iar e este **excentricitatea conicei**.

Problema lui Newton

Din relatiile (25) si conditiile initiale (23) obtinem:

$$\begin{cases} r(\theta_0) = r_0 \\ \left.\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right)\right|_{\substack{t=0 \\ (\theta=\theta_0)}} = -\dfrac{1}{r_0} ctg\,\alpha \end{cases} \underset{(25)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e\cos(\theta_0 - \theta_1) = \dfrac{p}{r_0} - 1 \\ \left.\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1+e\cos(\theta-\theta_1)}{p}\right)\right|_{\theta=\theta_0} = -\dfrac{e}{p}\sin(\theta_0-\theta_1) = -\dfrac{1}{r_0} ctg\,\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e\cos(\theta_0 - \theta_1) = \dfrac{p}{r_0} - 1 \\ e\sin(\theta_0 - \theta_1) = \dfrac{p}{r_0} ctg\,\alpha \end{cases} \qquad \text{(26a,b)}$$

Problema lui Newton

Ridicam la patrat relatiile (26a) si (26b) si le adunam:

$$e^2 = \frac{p^2}{r_0^{\ 2}} + 1 - \frac{2p}{r_0} + \frac{p^2}{r_0^{\ 2}} ctg^2\alpha = \frac{p^2}{r_0^{\ 2}} \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{2p}{r_0} + 1$$

Deci

$$e^2 = 1 + \frac{p}{r_0}\left(\frac{p}{r_0}\frac{1}{\sin^2\alpha} - 2\right) \qquad (27)$$

Revenind la expresia fortei $F(r) = -\frac{\mu m}{r^2}$ aratam ca F este conservativa, adica exista potentialul V=V(r) astfel incat: $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ .Obtinem:

$$V = -\frac{\mu m}{r} \qquad (28)$$

Problema lui Newton

Exprimam lucrul mecanic elementar:

$$\delta L = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F(r)dr = -\frac{dV}{dr}dr = -dV$$

Din teorema energiei cinetice avem: $dT = \delta L = -dV \;\Rightarrow\; d(T+V) = 0$

Iar prin integrare obtinem integrala prima a energiei

$$T + V = h',\quad h' \in \Re,\ \forall\ t \geq t_0 \tag{29}$$

Avem:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0{}^2 - \frac{\mu \cancel{m}}{r_0} = h' \underset{notatie}{=} \cancel{m}h$$

$$\boxed{\frac{1}{2}v_0{}^2 - \frac{\mu}{r_0} = h} \tag{30}$$

Problema lui Newton

In (27) avem:

$$e^2 = 1 + \frac{p}{r_0}\left(\frac{p}{r_0}\frac{1}{\sin^2\alpha} - 2\right) \underset{\substack{p=\frac{c^2}{\mu},\\ c=r_0 v_0 \sin\alpha}}{=} 1 + \frac{c^2}{\mu r_0}\left(\frac{c^2}{\mu r_0}\frac{1}{\sin^2\alpha} - 2\right) =$$

$$= 1 + \frac{c^2}{\mu r_0}\left(\frac{r_0{}^2 v_0{}^2 \sin^2\alpha}{\mu r_0}\frac{1}{\sin^2\alpha} - 2\right) = 1 + \frac{c^2}{\mu r_0}\left(\frac{r_0 v_0{}^2}{\mu} - 2\right) =$$

$$= 1 + \frac{c^2}{\mu r_0}\left[\frac{2r_0}{\mu}\left(\frac{v_0{}^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}\right)\right]$$

Problema lui Newton

Tinand cont de (30) avem

$$e^2 = 1 + \frac{c^2}{\mu r_0}\left[\frac{2r_0}{\mu}\left(\frac{v_0{}^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}\right)\right] \underset{\frac{v_0{}^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = h}{=} 1 + \frac{2c^2}{\mu^2}h \tag{31}$$

Daca

- **e < 1 (h < 0)** atunci conica este o **elipsa**
- **e > 1 (h > 0)** atunci conica este o **hiperbola**
- **e = 1 (h = 0)** atunci conica este o **parabola**

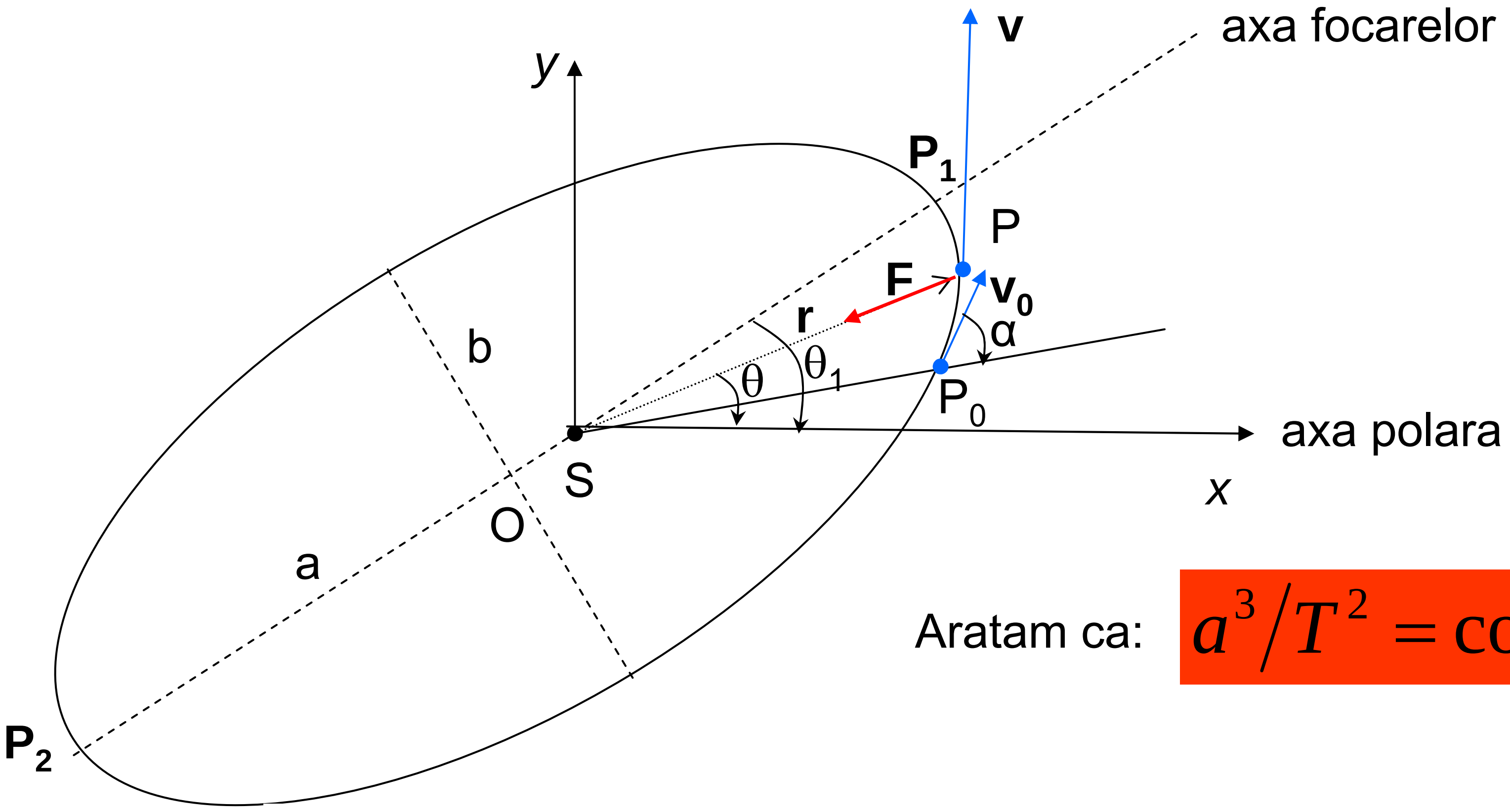
Prin urmare, daca h < 0, conica este o elipsa si am justificat astfel **prima lege a lui Kepler**

Cea de-a doua lege a lui Kepler rezulta din proprietatile fortei centrale si anume legea ariilor

Ramane sa obtinem legea a treia a lui Kepler.

Problema lui Newton

Consideram ca miscarea lui P se face pe o elipsa:



Aratam ca: $a^3/T^2 = \text{constant}$

Avem: $$a = \frac{1}{2}(SP_1 + SP_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e\cos(\theta_1-\theta_1)} + \frac{p}{1+e\cos(\theta_1+\pi-\theta_1)}\right)$$

Problema lui Newton

Obtinem asadar:

$$a = \frac{p}{1-e^2} \tag{32}$$

Dar

$$e^2 = \frac{OS^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$b^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow b = a\sqrt{1-e^2} \underset{(32)}{=} \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \tag{33}$$

Tinand cont de relatia (13) avem:

$$T = \frac{2\pi\, a\, b}{c} \tag{34}$$

Problema lui Newton

Utilizand (32) si (34) si (33) calculam raportul

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a^3c^2}{4\pi^2a^2b^2} = \frac{ac^2}{4\pi^2b^2} \underset{(33)}{=} \frac{ac^2}{4\pi^2a^2(1-e^2)} =$$

$$= \frac{c^2}{4\pi^2a(1-e^2)} \underset{p=c^2/\mu}{=} \frac{p\mu}{4\pi^2a(1-e^2)} \underset{(32)}{=}$$

$$= \frac{p\mu}{4\pi^2p} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \text{constant} \qquad (35)$$

Asadar am obtinut $\boxed{a^3/T^2 = \text{constant}}$ ceea ce reprezinta **legea a treia a lui Kepler**

Obs.: Am aratat ca miscarea unui punct material P sub actiunea unei forte centrale de tip Newtonian respecta legile lui Kepler.