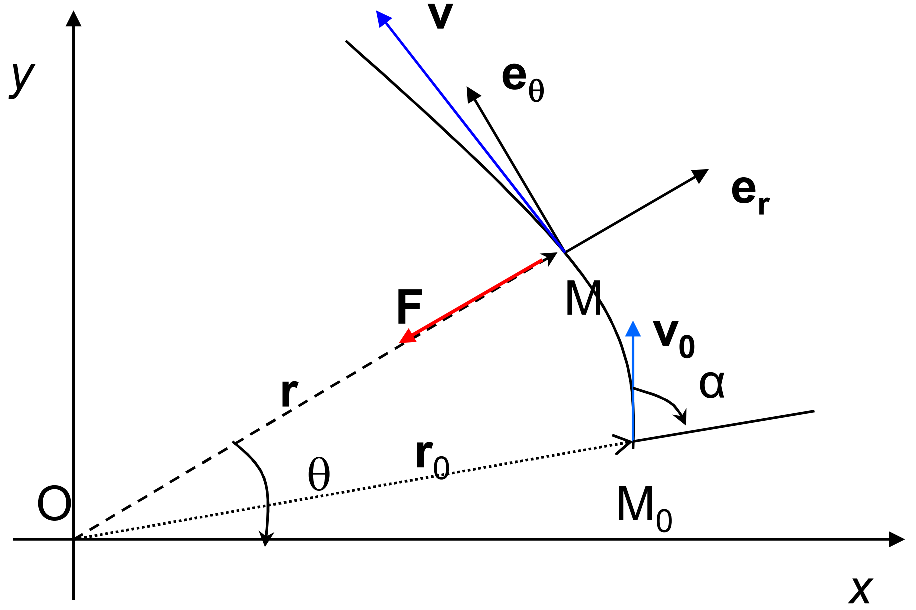
Forte centrale

Note de curs (in format PDF):
www.math.ubbcluj.ro/~tgrosan/Infostud.htm/Mecanica.htm

Numim forta centrala o forta **F** a carei directie trece in orice moment printr-un punct fix O, numit centrul fortei.



Forte centrale

Fie O centrul forţei $\overrightarrow{F}$ ce acţionează asupra unui punct material $M(m)$ de vector de poziţie $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ faţă de O. Fie (r, θ) coordonatele polare ale punctului M. Atunci avem

$$\overrightarrow{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}) \text{ (în raport cu } (\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta))$$

Fie $\overrightarrow{\rho} = \frac{\overrightarrow{r}}{r} = \frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|}$ versorul vectorului de poziţie $\overrightarrow{r}$. Deci avem

$$\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{\rho} = F\frac{\overrightarrow{r}}{r},$$

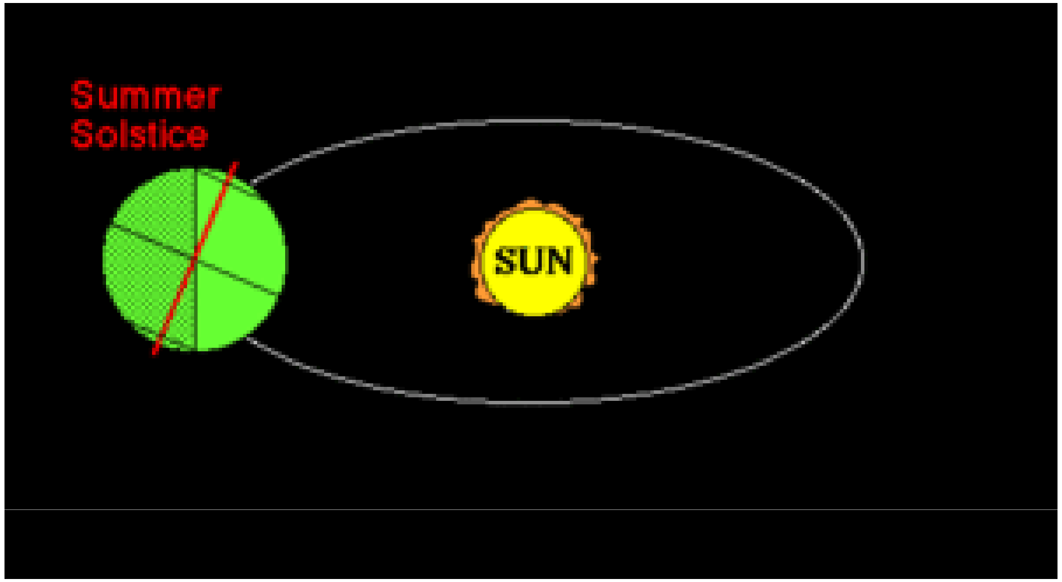
unde F este mărimra algebrică a forţei $\overrightarrow{F}$.

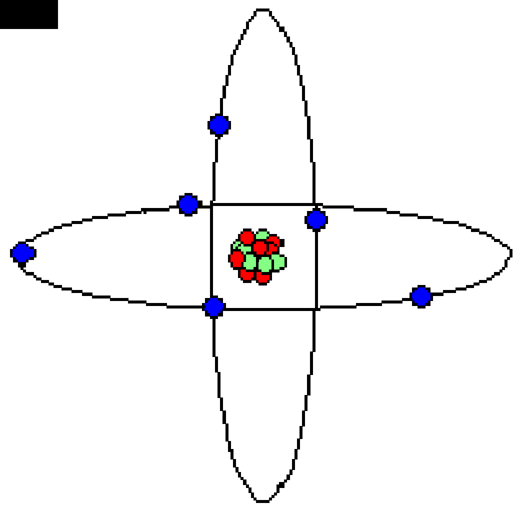
- Dacă $F > 0 \Rightarrow \overrightarrow{F}$ *repulsivă.*
- Dacă $F < 0 \Rightarrow \overrightarrow{F}$ *atractivă.*

Exemple: Forta gravitationala, forta lui Coulomb

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad F = k_e\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Forte centrale





Forte centrale

- Dacă $F < 0 \Rightarrow \overrightarrow{F}$ *atractivă.*

Din teorema momentului cinetic $\left(\frac{d\overrightarrow{K}_0}{dt} = \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = 0\right)$ rezultă $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v}) = 0$. Prin urmare, obţinem *integrala primă a ariilor*

$$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{c} = \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0 \\ \overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r}_0, \ \ \overrightarrow{v}(t_0) = \overrightarrow{v}_0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Viteza areolară a punctului M este:

$$\frac{d\overrightarrow{A}}{dt} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{c}}{2}, \ \forall\, t \geq t_0, \tag{3}$$

deci viteza areolară este constantă.

Prin urmare, *mişcarea punctului $M(m)$ sub acţiunea forţei centrale $\overrightarrow{F}$ are loc astfel încât momentul cinetic şi viteza areolară sunt constante vectoriale,* $\forall\, t \geq t_0$.

Forte centrale

- Să presupunem că

$$\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3) \neq 0.$$

Din $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{c} = \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0$ rezultă $\overrightarrow{r} \cdot (\overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0) = 0$ sau $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{c} = 0$. Aşadar,

$$xc_1 + yc_2 + zc_3 = 0 \tag{4}$$

şi deci *mişcarea punctului M este plană şi are loc în planul determinat de vectorii $\overrightarrow{r}_0$ şi $\overrightarrow{v}_0$* (normala la acest plan fiind $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0$).

Fie Oxy planul mişcării punctului $M(m)$. Fie (r, θ) - coordonatele polare ale lui M. Avem

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - y\dot{x})\overrightarrow{k} = r^2\dot{\theta}\overrightarrow{k}.$$

Forte centrale

Deoarece $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0 = r_0^2\dot{\theta}_0\overrightarrow{k}$ (deci $\overrightarrow{c} \perp$ planul mişcării), obţinem ($\overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{c} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}$)

$$r^2\dot{\theta} = c, \ \forall\, t \geq t_0. \tag{5}$$

(5) este *integrala ariilor* (deoarece $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int r^2(\theta)d\theta$ - aria descrisă de M în planul xOy).

Constanta ariilor c din (5) se determină din condiţiile iniţiale:

$$c = |\overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0| = r_0 v_0 \sin\alpha$$

şi deci

$$c = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \sin\alpha, \quad \alpha = (\overrightarrow{r}_0, \overrightarrow{v}_0) \tag{6}$$

- Dacă $\overrightarrow{c} = 0 \ \Rightarrow$ mişcarea punctului M este *rectilinie.*

În continuare admitem că $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0 \neq 0$ (constanta ariilor este diferită de zero).

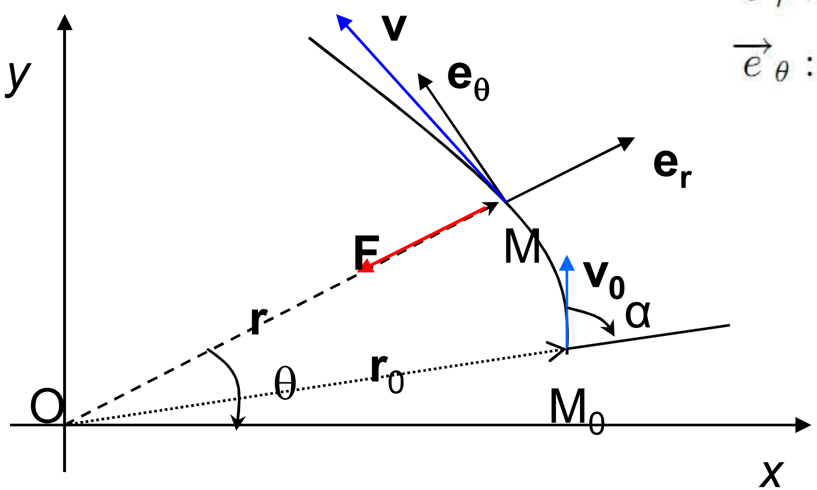
Determinarea mişcării în planul ei

Fie Oxy planul mişcării punctului M şi (r, θ) coordonatele polare ale punctului M. Ecuaţia diferenţială a mişcării punctului M este:

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = F\frac{\overrightarrow{r}}{r}, \quad \overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r}_0, \quad \overrightarrow{v}(t_0) = \overrightarrow{v}_0 \tag{7}$$

Proiectând (7) pe direcţiile (radială şi transversală) $\overrightarrow{e}_r$ şi $\overrightarrow{e}_\theta$ şi ţinând cont că faţă de reperul $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta$) acceleraţia are componentele $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right)$, obtinem

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{e}_r : \\ \overrightarrow{e}_\theta : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \\ \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \end{array} \right. \tag{8}$$



Forte centrale

Din $(8)_2$ rezultă *integrala ariilor*:

$$r^2\dot{\theta} = c, \tag{9}$$

unde

$$c = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \sin\alpha, \quad \alpha = (\widehat{\overrightarrow{r}_0, \overrightarrow{v}_0}) \tag{10}$$

Din (9) rezultă

$$r^2(\theta)d\theta = cdt \;\Rightarrow\; \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta)d\theta = c(t_1 - t_0),$$

şi deci descrie arii egale în intervale de timp egale. Aceasta este *legea ariilor*.

Prin urmare, *mişcarea punctului material sub acţiunea unei forţe centrale este plană şi respectă legea ariilor*.

Forte centrale

(i) Să presupunem mai întâi că forţa centrală nu depinde explicit de timp, deci

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{v}).$$

Eliminăm timpul t din $(8)_1$ utilizând integrala ariilor (9). Avem:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\underbrace{\dot{\theta}}_{=\frac{c}{r^2}} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Prin urmare, ecuaţia $(8)_1$ devine:

$$-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = F\left(r, \theta, -c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right), \frac{c}{r^2}\right) \qquad (11)$$

Forte centrale

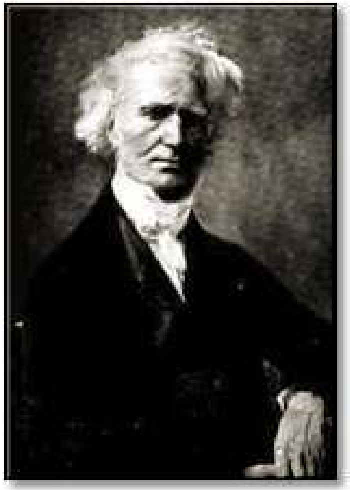
Dacă forţa depinde numai de poziţia (r, θ), ecuaţia (11) are forma

$$-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=F(r,\theta) \tag{12}$$

• Ecuaţia (11) (sau (12)) se numeşte *ecuaţia lui Binét* şi reprezintă ecuaţia diferenţială a traiectoriei punctului sub acţiunea unei forţe centrale ce depinde explicit numai de poziţie şi viteză.

• Condiţiile Cauchy (iniţiale) adăugate ecuaţiei lui Binét (11) (sau (12)) (rezultă din condiţiile iniţiale $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$) au forma

$$r(\theta_0) = r_0, \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ (t=t_0)}} = -\frac{1}{r_0}\text{ctg }\alpha. \tag{13}$$



Jacques Philippe Marie Binet
(February 2, 1786 – May 12, 1856)

Forte centrale

Într-adevăr, avem

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\substack{\theta=\theta_0\\(t=t_0)}} = -\frac{1}{r_0^2}\frac{dr}{d\theta}\Big|_{t=t_0} = -\frac{1}{r_0^2}\frac{\dot r}{\dot\theta}\Big|_{t=t_0} = -\frac{1}{r_0^2}\frac{\dot r_0}{\dot\theta_0}$$

$$= -\frac{1}{r_0^2}\frac{pr_{\vec r_0}\vec v_0}{\frac{c}{r_0^2}} = -\frac{1}{c}v_0\cos\alpha = -\frac{1}{r_0 v_0 \sin\alpha}v_0\cos\alpha = -\frac{1}{r_0}\text{ctg }\alpha,$$

şi deci obţinem

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\substack{\theta=\theta_0\\(t=t_0)}} = -\frac{1}{r_0}\text{ctg }\alpha$$

Din ecuaţia Binét (11) (sau (12)) şi condiţiile iniţiale (13) rezultă *ecuaţia traiectoriei în coordonate polare*

$$r = r(\theta). \tag{14}$$

Forte centrale

Din legea ariilor $r^2\dot{\theta} = c \;\Rightarrow\; r^2(\theta)d\theta = cdt$, adică

$$c(t - t_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(\theta)d\theta \tag{15}$$

şi deci

$$\theta = \theta(t). \tag{16}$$

Din (14) şi (16) obţinem $r = r(t)$, deci avem

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t),\; t \in [t_0, T],$$

$t_0 \geq 0$, $T < \infty$. Prin urmare mişcarea este complet determinată.

Observaţia 2 *Formula* (11) (*sau* (12)) *poate fi utilizată şi la determinarea forţei centrale* F *dacă se cunoaşte traiectoria punctului* M, $r = r(\theta)$.

Forte centrale

Asadar, problema miscarii sub actiunea unei forte centrale se poate reduce la ecuatia lui Binet:

$$-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=\pm F(r,\theta) \qquad (17)$$

semn „+“ pentru forta repulsiva
semn „–“ pentru forta atractiva

cu conditiile initiale:

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{\substack{t=0\\(\theta=\theta_0)}}=\frac{1}{r_0}; \qquad \left.\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{\substack{t=0\\(\theta=\theta_0)}}=-\frac{1}{r_0}ctg\alpha \qquad (18)$$

unde c este constanta ariilor:

$$c=r_0^{\,2}\dot{\theta}_0=r_0 v_0\sin\alpha \qquad (19)$$

Forte centrale - continuare

Daca forta F depinde doar de raza vectoare r (F = F(r)) atunci ca o alternativa la ecuatia lui Binet se poate aplica teorema energiei:

$$dT = \delta L$$

unde

$$dT = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \frac{F}{r}\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{F}{r} d\left(\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}\right) = F dr$$

Utilizand teorema energiei se obtine:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F\, dr \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2} = \int_{r_0}^{r} F(r) dr$$

Deci

$$\boxed{v^2 = \frac{2}{m}\int F(r) dr + h} \qquad (20)$$

constanta energiei

Forte centrale - continuare

Tinem cont ca:

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\ \dot{r} &= -c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \\ \dot{\theta} &= \frac{c}{r^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v^2 = c^2\left\{\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\}$$

Deci:

$$c^2\left\{\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = \frac{2}{m}\int F(r)dr + h \qquad (21)$$

unde h se determina din conditiile initiale: $v_0{}^2 = \frac{2}{m}\int F(r)dr + h$

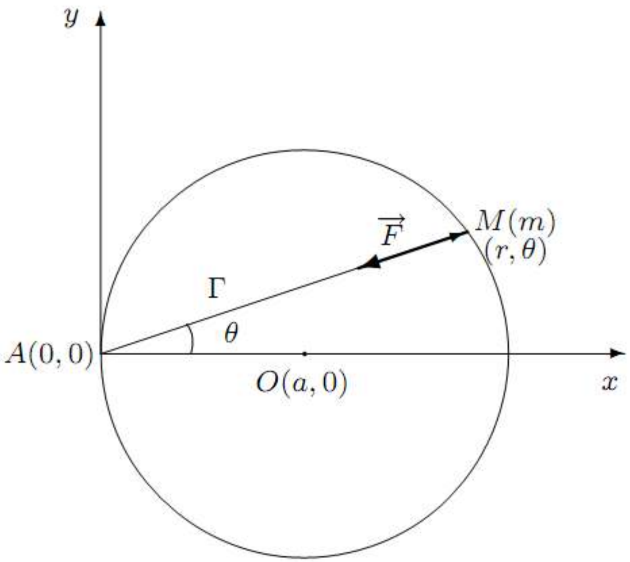
• Deci, dacă $F = F(r)$, determinarea mişcării se reduce la *integrala energiei* **(21)** şi *integrala ariilor* $r^2\dot{\theta} = c \;\Rightarrow\; r = r(t),\, \theta = \theta(t)$.

Probleme

Problema 1. Un punct material $M(m)$ descrie un cerc de rază a, fiind atras de un punct fix A al acestui cerc. Să se determine forţa de atracţie şi viteza punctului material în funcţie de distanţa r dintre M şi A.

Soluţie.

Ecuaţia cercului facţă de reperul Axy este:



$$(x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Forte centrale

Fie r şi θ coordonatele polare ale punctului $M(m)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow (r\cos\theta - a)^2 + r^2\sin^2\theta = a^2$$

$$\left.\Rightarrow r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta = a^2 \Rightarrow \begin{array}{l} r(r - 2a\cos\theta) = 0 \\ r \neq 0 \text{ (punctul descrie cercul)} \end{array}\right\} \Rightarrow r = 2a\cos\theta.$$

Aşadar, ecuaţia cercului în coordonate polare are forma:

$$r = 2a\cos\theta.$$

De aici obţinem

$$r = 2a\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2a\cos\theta}\right) = \frac{1}{2a}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2a}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) = \frac{1}{2a}\left[\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right] = \frac{1}{2a}\left(\frac{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right).$$

Forte centrale

Înlocuind în ecuaţia lui Binet, obţinem

$$F = \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{2a}\frac{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}+\frac{1}{r}\right]$$

$$= \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{2-2\cos^2\theta}{\cos^3\theta}\right)+\frac{1}{r}\right] = \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{2a}\left(\frac{2}{\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)+\frac{1}{r}\right]$$

$$= \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{2a}\left(\frac{2}{\frac{r^3}{8a^3}}-\frac{1}{\frac{r}{2a}}\right)+\frac{1}{r}\right] = \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{8a^2}{r^3}-\frac{1}{r}=\frac{1}{r}\right] = \frac{8mc^2a^2}{r^5}$$

$$\Rightarrow\ F = \frac{8mc^2a^2}{r^5}$$

Forte centrale

În plus, avem

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = c^2\left[\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = c^2\left[\frac{1}{4a^2}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^4\theta} + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$= c^2\left[\frac{1}{4a^2}\left(\frac{1}{r^4/(16a^4)} - \frac{1}{r^2/(4a^2)}\right) + \frac{1}{r^2}\right] = \frac{4a^2c^2}{r^4}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{2ac}{r^2}$$

Forte centrale

Problema 2. Să se determine mişcarea unui punct material M de masă $m = 1$ aflat sub acţiunea unei forţe centrale atractive invers proporţională cu cubul distanţei de la punct la centrul forţei. În momentul iniţial $t = 0$ avem:

$$\theta_0 = 0,\ r_0 = 2,\ v_0 = 1/2,\ \alpha = (\widehat{\vec{r}_0, \vec{v}_0}) = \frac{\pi}{4}.$$

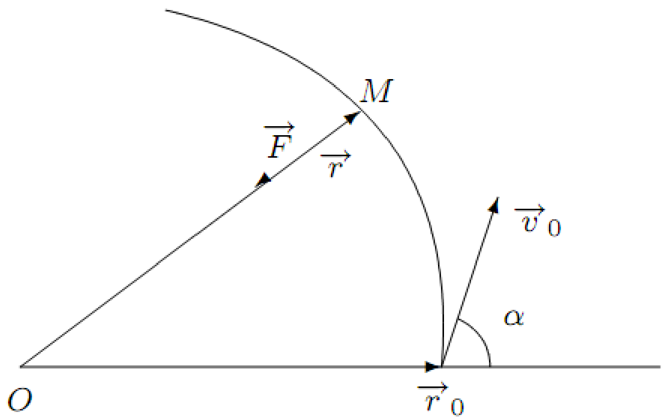
Coeficientul de proporţionalitate este $k = 1$.

Soluţie.

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{mc^2}{r^2}\left(\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^3} \\ c = r_0 v_0 \sin\alpha = 2\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} = C_1 e^{\theta} + C_2 e^{-\theta}$$

Forte centrale



$$\left.\begin{array}{l} r(0) = 2 \\ \theta(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = C_1 + C_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right)\Big|_{t=0} = -\dfrac{1}{r_0}\text{ctg } \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right)\Big|_{t=0} = C_1 - C_2 \\ \theta(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 - C_2 = -\dfrac{1}{2} \\ C_1 + C_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow 2C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Forte centrale

$$C_1 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{r} = \frac{1}{2}e^{-\theta} \;\Rightarrow\; r = 2e^{\theta} \text{ ecuaţia traiectoriei}$$

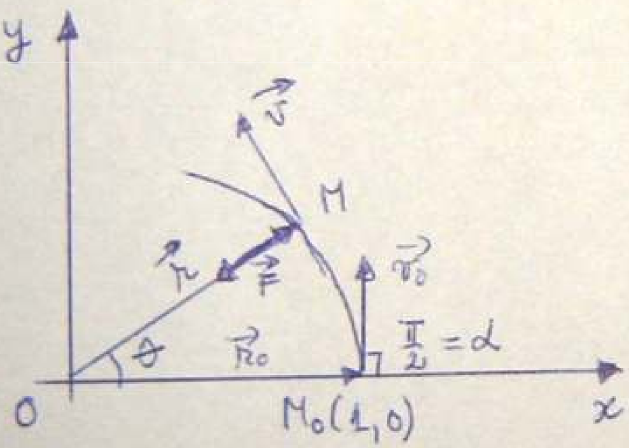
Din legea ariilor $r^2\dot{\theta} = c = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; 4e^{2\theta}\dot{\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; 4e^{2\theta}d\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}dt$

$$\Rightarrow\; 2d(e^{2\theta}) = \frac{\sqrt{2}}{2}dt \;\Rightarrow\; 2e^{2\theta}\Big|_0^{\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}t \;\Rightarrow\; e^{2\theta} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{4}t$$

$$\Rightarrow\; \frac{r^2}{4} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}t \;\Rightarrow\; r^2 = \sqrt{2}t + 4 \;\Rightarrow\; 4e^{2\theta} = \sqrt{2}t + 4 \;\Rightarrow\; e^{2\theta} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}t + 4)$$

$$\Rightarrow\; 2\theta = \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}t\right) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \theta = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}t + 1\right) \\[2ex] r = (\sqrt{2}t + 4)^{1/2} \end{cases}$$

3. Un punct material M de masă $m = 1$ este atras de forța centrală de mărime $F = \frac{2}{r^2}$. La momentul inițial punctul M se află în $M_0(1,0)$ și avea viteza $v_0 = \sqrt{3}$ perpendiculară pe $\vec{r}_0$. Se cere traiectoria punctului M.



$F = F(r) \Rightarrow$ putem aplica teorema energiei

$$v^2 = \frac{2}{m} \int -F\,dr + h$$

$$v^2 = -\frac{2}{m} \cdot \int \frac{2}{r^2}\,dr + h$$

$$v^2 = \frac{4}{r} + h$$

La $t = 0$ avem $v_0^2 = \frac{4}{r_0} + h \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = -1}$

$$v^2 = c^2 \left\{ \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\}$$

$$c = v_0 \cdot r_0 \cdot \sin\alpha = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 3 \left\{ \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right\} = \frac{4}{r} - 1$$

Facem substituția: $\frac{1}{r} = u \quad \Rightarrow \quad 3 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = 4u - 1$

$$3 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = -3u^2 + 4u - 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} \frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{-3u^2 + 4u - 1}$$

Obs: se alege semnul „+" deoarece: r scade (și atunci $du = d\left(\frac{1}{r}\right)$ crește) și $d\theta$ crește.

Forte centrale

Avem:

$$\frac{\sqrt{3}\,du}{\sqrt{-3u^2+4u-1}} = d\theta \Rightarrow \theta + c = \int \frac{\sqrt{3}\,du}{\sqrt{-3u^2+4u-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta + c = \int \frac{du}{\sqrt{-u^2+\frac{4}{3}u-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}} = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(u-\frac{2}{3}\right)^2}} = \int \frac{3\,du}{1-(3u-2)^2} =$$

$$= \arcsin(3u-2)$$

Obs: Am folosit $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = a \cdot \arcsin\frac{x}{a}$

Deci:
$$\left.\begin{aligned} &\theta + c = \arcsin\left(\frac{3}{r}-2\right) \\ &\text{La } t=0: \ \theta = 0 \\ &\qquad\qquad\ \ r = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Atunci: $\theta + \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{3}{r}-2\right) \Rightarrow \frac{3}{r} - 2 = \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{3}{2+\cos\theta}}$$