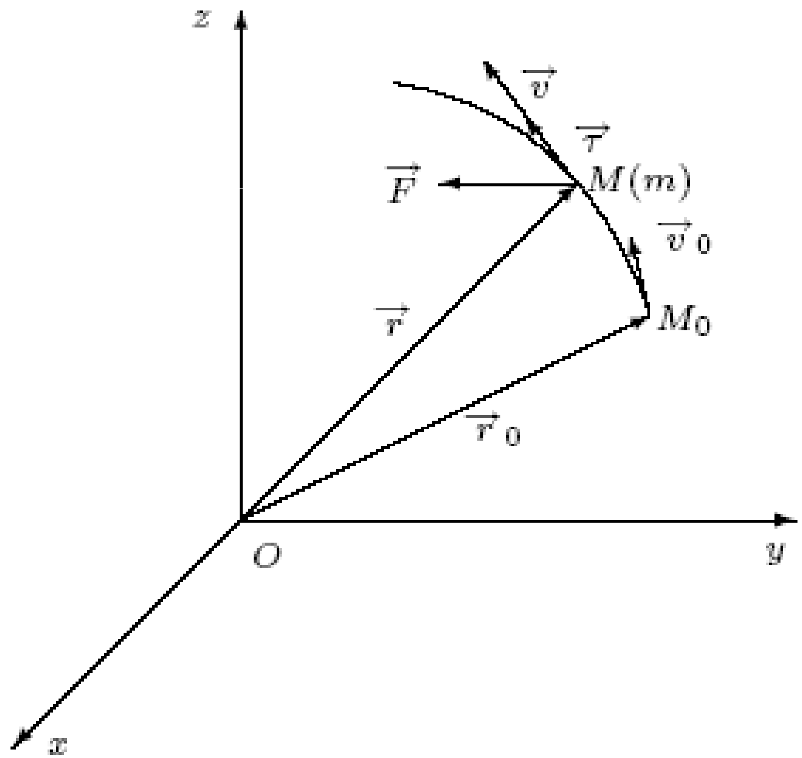
Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Note de curs (in format PDF):
www.math.ubbcluj.ro/~tgrosan/Infostud.htm/Mecanica.htm

Problema directă a mecanicii constă în determinarea legii de mişcare a unui punct material M de masă m, faţă de un sistem de referinţă cartezian $Oxyz$, cunoscând *starea iniţială* a punctului material (poziţia $\vec{r}_0$ şi viteza $\vec{v}_0$ la momentul iniţial t_0) şi rezultanta $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ a forţelor care acţionează asupra lui din partea altor corpuri (puncte materiale).



Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Această problemă revine la aceea a integrării *ecuaţiei diferenţiale de ordinul al doilea*

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{v}, t), \; t \in (t_0, t_1) \tag{1}$$

la care se adăugă *condiţiile iniţiale*:

$$\overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r}_0, \; \overrightarrow{v}(t_0) = \overrightarrow{v}_0, \tag{2}$$

$\overrightarrow{r}_0, \overrightarrow{v}_0$ fiind constante vectoriale date, $t_0 \geq 0$, $t_1 < +\infty$. Proiectând (1) şi (2) pe axele reperului $Oxyz$ obţinem problema Cauchy:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z, \; t \in (t_0, t_1), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0, \; y(t_0) = y_0, \; z(t_0) = z_0 \\ &\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \; \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \; \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0, \end{aligned} \tag{4}$$

unde $\vec{F} = (X, Y, Z)$, $\overrightarrow{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ (faţă de reperul $Oxyz$).

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Există însă situaţii în care este mult mai convenabilă înlocuirea unora dintre ecuaţiile diferenţiale (3) cu anumite funcţii depinzând de necunoscutele sistemului şi de variabila independentă t, continue împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul întâi şi care se reduc identic (pentru orice t) la constante, dacă necunoscutele sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii. Posibilitatea existenţei unor astfel de funcţii, numite *integrale prime* ale mişcării, rezultă din teoremele generale ale mecanicii, acestea fiind consecinţe directe ale principiilor newtoniene. Avantajul existenţei integralelor prime decurge din faptul că acestea sunt ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, care necesită doar o singură integrare pentru determinarea soluţiei problemei de mişcare.

Aşadar, avem:

Definiţia 1 O relaţie (funcţională) de forma

$$\mathcal{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = c \in \mathbb{R}, \ \forall\, t \geq t_0 \tag{5}$$

dacă funcţiile

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{6}$$

satisfac sistemul de ecuaţii diferenţiale (3), şi $\mathcal{F} \in C^1$, se numeşte *integrală primă a mişcării (a sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării)*.

1 Teorema impulsului

Definiţia 2 *Impulsul* $\vec{H}$ al punctului material este produsul dintre masa şi viteza sa $\vec{v}$:

$$\vec{H} = m\vec{v}. \tag{7}$$

Din ecuaţia diferenţială (1) şi axioma de conservare a masei, obţinem

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{F} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{H}}{dt} = \overrightarrow{F}, \tag{8}$$

şi deci *ecuaţia impulsului*:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{F}. \tag{9}$$

Aceasta exprimă

Teorema impulsului. *În orice moment al mişcării unui punct material, derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului.*

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

La ecuaţia (8) se adaugă condiţia iniţială $\overrightarrow{H}(t_0) = \overrightarrow{H}_0$.
Prin proiecţie pe axele reperului $Oxyz$ obţinem:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = X,\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = Y,\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = Z.$$

Integrale prime

- Dacă $\vec{F} = 0$, atunci impulsul punctului material se conservă, adică

$$\vec{H} = \vec{c}_0, \tag{10}$$

$\vec{c}_0$ fiind o constantă vectorială. Ecuaţia (10) reprezintă o integrală primă a mişcării, numită *legea de conservare a impulsului.*

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Din condiţia iniţială $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ şi din ecuaţia (10) rezultă

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0, \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Prin urmare, mişcarea punctului material izolat ($\vec{F} = 0$) este rectilinie şi uniformă cu viteza $\vec{v}_0$ (punctul este în repaus dacă $\vec{v}_0 = 0$). Acest rezultat exprimă tocmai *esenţa principiului inerţiei.*

Integrând ecuaţia $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$, obţinem legea mişcării punctului material în forma

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0, \tag{11}$$

unde $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$.

- Dacă $\vec{F} \neq 0$, dar proiecţia lui $\vec{F}$ pe o direcţie fixă de versor $\vec{u}$ este nulă,

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = 0, \tag{12}$$

atunci din ecuaţia (9) obţinem integrala primă

$$\vec{H} \cdot \vec{u} = \text{constant}, \tag{13}$$

care exprimă conservarea proiecţiei impulsului (deci şi a vitezei) pe direcţia considerată.

2 Teorema momentul cinetic

Definiţia 3 *Momentul cinetic* $\vec{K}_O$ al punctului material faţă de originea O este produsul vectorial dintre vectorul de poziţie şi impulsul punctului material

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}. \tag{14}$$

În proiecţie pe axele reperului $Oxyz$ obţinem

$$K_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad K_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad K_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{15}$$

Utilizând egalitatea $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{r} \times m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ şi ecuaţia lui Newton $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$, obţinem ecuaţia vectorială

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{16}$$

sau

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O, \tag{17}$$

unde

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \tag{18}$$

este *momentul forţei* $\vec{F}$ faţă de originea O.

Ecuaţia (17) exprimă

Teorema momentului cinetic. *În orice moment al mişcării unui punct material, derivata momentului cinetic în raport cu timpul este egală cu momentul rezultant al forţelor care acţionează asupra punctului material, ambele momente fiind evaluate în raport cu acelaşi punct* O.

Integrale prime

• Dacă $\vec{M}_O = 0$ (adică $\vec{F} = 0$ sau $\vec{F} \parallel \vec{r}$), atunci momentul cinetic al punctului material se conservă în timpul mişcării, adică

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{c}, \tag{19}$$

unde $\vec{c} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$. Ecuaţia vectorială (19) este o integrală primă a mişcării, numită *legea de conservare a momentului cinetic.*

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

În cazul particular în care forţa $\vec{F}$ este *centrală*, adică direcţia ei trece în orice moment prin punctul O (vectorii $\vec{F}$ şi $\vec{r}$ sunt deci coliniari), mişcarea punctului material este plană. Într-adevăr, din integrala primă (19) rezultă egalitatea

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0.$$

Înmulţind scalar această egalitate cu $\vec{r}$, deducem

$$(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) \cdot \vec{r} = 0,$$

adică vectorul de poziţie $\vec{r}$ se află în orice moment în planul determinat de vectorii $\vec{r}_0$ şi $\vec{v}_0$.

- Dacă $\vec{M}_O \neq 0$, dar există o direcţie fixă de versor $\vec{u}$ astfel încât

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = 0, \tag{20}$$

atunci avem integrala primă

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) \cdot \vec{u}. \tag{21}$$

Definiţia 4 Numim *viteză areolară* a punctului material mărimea vectorială

$$\frac{d\vec{A}}{dt} := \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}. \tag{22}$$

Din (14) şi (22) deducem

$$\frac{1}{2m}|\vec{K}_O| = \left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right|, \tag{23}$$

adică cele două mărimi $|\vec{K}_O|$ şi $\frac{d\vec{A}}{dt}$ sunt proporţionale.

În concluzie, *dacă* $\vec{F} \parallel \vec{r}$, *mişcarea punctului material se face astfel încât vectorul viteză areolară este constant, iar dacă are loc condiţia* (20), *proiecţia vectorului* $\frac{d\vec{A}}{dt}$ *pe direcţia de versor* $\vec{u}$ *este constantă.*

În particular, dacă $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$, atunci mişcarea punctului material este rectilinie.

3 Teorema energiei cinetice

Definiţia 5 Mărimea scalară
$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{24}$$
se numeşte *energie cinetică* a punctului material.

Înmulţind scalar ecuaţia $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ cu $d\vec{r}$ şi utilizând egalităţile
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot d\vec{r} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt = m\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = dT,$$
deducem
$$dT = \delta L, \tag{25}$$
unde
$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{x} \tag{26}$$
este *lucrul mecanic elementar* al forţei $\vec{F}$ efectuat pe o deplasare infinitezimală $d\vec{r}$ a punctului material. Simbolul δ precizează faptul că, în general, forma diferenţială
$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$$
nu este o diferenţială totală exactă.

Ecuaţia (25) exprimă

Teorema energiei cinetice. *Mişcarea punctului material se face astfel încât, în orice moment, diferenţiala energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat de rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului.*

Integrând ecuatia (25) în raport cu timpul, între două momente t_1 şi t_2, când punctul material parcurge o porţiune finită $\mathcal{C}$ a traiectoriei sale, între punctele $A(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ şi $B(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$, obţinem

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3. \qquad (27)$$

Ecuaţia (27) este *forma integrală a teoremei energiei cinetice*. Membrul drept al acestei ecuaţii este lucrul mecanic al forţei $\vec{F}$ când punctul material parcurge porţiunea finită $\mathcal{C}$ a traiectoriei sale. În general, lucrul mecanic depinde de drumul urmat între punctele A şi B, de momentele t_1 şi t_2 şi de viteza cu care punctul material parcurge acest drum.

Există diferite metode de evaluare a integralei curbilinii din (27), cea mai frecventă revenind la utilizarea reprezentării parametrice a curbei $\mathcal{C}$.

3.0.1 Câmp conservativ de forţe

Definiţia 6 Un câmp de forţe $\vec{F} = \vec{F}(\mathbf{x}, t)$ se numeşte *potenţial* dacă există un câmp scalar $V(\vec{x}, t)$ cu acelaşi domeniu de definiţie ca şi $\vec{F}$, astfel încât pentru orice $\vec{x}$ şi t să avem

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\mathrm{grad}V(\vec{r}, t) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\vec{i}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\vec{i}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\vec{i}_3\right), \tag{28}$$

$\vec{i}_i$ fiind versorul axei Ox_i, $i = 1, 2, 3$.

Are loc următorul rezultat:

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu conex, $t_0 \geq 0$ şi $T > t_0$ două constante date. Un câmp de forţe $\vec{F} : D \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$, este potenţial dacă şi numai dacă el este irotaţional, adică

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0 \tag{29}$$

în orice punct din domeniul D.

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Definiţia 7 Un câmp de forţe $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ se numeşte *conservativ* dacă există un câmp scalar $V(\vec{r})$ cu acelaşi domeniu de definiţie ca şi $\vec{F}$, astfel încât în orice punct din domeniul de definiţie al câmpului de forţe să avem satisfăcută condiţia

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}V(\vec{r}). \tag{30}$$

Au loc următoarele rezultate echivalente cu definiţia unui câmp conservativ de forţe definit pe un domeniu simplu conex:

Teorema 8 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^3$ domeniu simplu conex. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

- *Un câmp de forţe* $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, *este conservativ dacă şi numai dacă el este irotaţional, adică*

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \mathbf{0}$$

în orice punct din domeniul de definiţie al câmpului de forţe.

- *Câmpul de forţe* $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ *este conservativ dacă şi numai dacă are loc condiţia*

$$\int_\Gamma \underbrace{\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}}_{=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz} = 0, \tag{31}$$

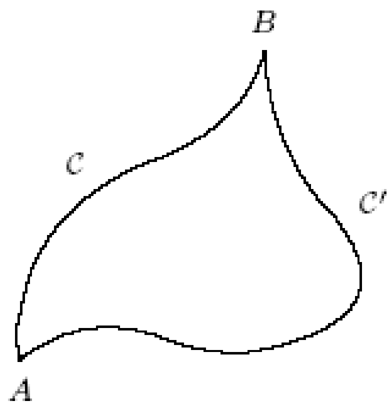
oricare ar fi curba închisă Γ *din* D.

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

- *Câmpul de forţe $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ este conservativ dacă şi numai dacă lucrul său mecanic nu depinde de drumul de integrare, adică*

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}'} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{32}$$

oricare ar fi curbele $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ ce unesc punctele arbitrare A şi B din domeniul de definiţie al câmpului de forţe.



Teoremele generale ale dinamicii punctului material

- *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca* $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ *să fie câmp conservativ este ca* **forma diferenţială** (*lucrul mecanic elementar*)

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

să fie o diferenţială totală exactă, adică să fie îndeplinite condiţiile

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, \tag{33}$$

F_i *fiind proiecţia lui* $\vec{F}$ *pe axa* Ox_i, $i = 1, 2, 3$.

Observaţia 9 *Rezultatele Teoremei precedente au loc şi pentru o forţă conservativă.*

Exemple de forte conservative: greutatea, forta electrica, forta elastica

Exemple de forte neconservative: forta de frecare

4 Lucrul mecanic al unei forţe

Definiţia 10 Fie $\vec{F}$ forţa care acţionează asupra punctului M, $vecr = \overrightarrow{OM}$.

Lucrul mecanic elementar al forţei $\vec{F}$ pentru deplasarea elementului $d\vec{r}$ a punctului M, δL, este mărimea scalară

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = xdx + Ydy + Zdz \tag{34}$$

(formă diferenţială de ordinul întâi).

Să presupunem că $\vec{F}$ depinde numai de poziţia $\vec{r}$, $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ şi că există $U = U(x, y, z)$ astfel încât

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{35}$$

adică

$$\vec{F} = \mathrm{grad} U \tag{36}$$

Funcţia U se numeşte *funcţie de forţă*, iar $V := -U$ *energie potenţială*.

În acest caz $\vec{F}$ derivă din funcţia de forţă U sau $\vec{F}$ este forţă potenţială (conservativă).

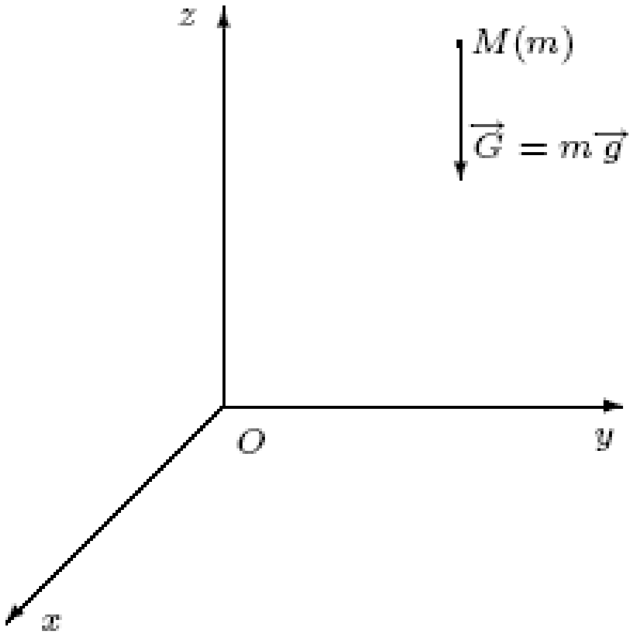
Exemplul 11

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g} = -\mathrm{grad}V \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial V}{\partial z} = mg$$

$$\Rightarrow dV = d(mgz)$$

$$\Rightarrow V = mgz + c, \quad U = -mgz$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{G} = m\overrightarrow{g} \ \textit{forţă potenţială (conservativă)}$$



Determinarea funcţiei de forţă în caz plan

Fie $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (X, Y)$, $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ astfel încât

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad (37)$$

unde D este domeniu simplu conex ($\subseteq \mathbb{R}^2$).

Atunci există o *funcţie de forţă* $U : D \to \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{F} = \text{grad}\, U$, adică

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}. \qquad (38)$$

Într-adevăr, integrând $(38)_1$ (în raport cu x) obţinem

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} X(s, y)ds + \varphi(y), \qquad (39)$$

unde $\varphi(y)$ se determină din $(38)_2$, adică:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial U(s, y)}{\partial y} ds + \varphi'(y) = Y(x, y)$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

sau, conform (37),

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Y(s,y)}{\partial s} ds + \varphi'(y) = Y(x,y).$$

Pin urmare,

$$Y(x,y) - Y(x_0,y) + \varphi'(y) = Y(x,y)$$

şi deci

$$\varphi'(y) = Y(x_0,y),$$

adică

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Y(x_0,u)du + const. \tag{40}$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Conform (39) şi (40) obţinem funcţia de forţă (abstracţie de o constantă aditivă)

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} X(s, y)ds + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, u)du. \tag{41}$$

• Să presupunem acum că $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ este *potenţială* (sau *conservativă*), deci că $\exists\, U = U(x, y, z)$ astfel încât $\vec{F} = \mathrm{grad}U = -\mathrm{grad}V$, adică

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Atunci lucrul mecanic elementar devine

$$\delta L = Xdx + Ydy + Zdz = dU = -dV$$

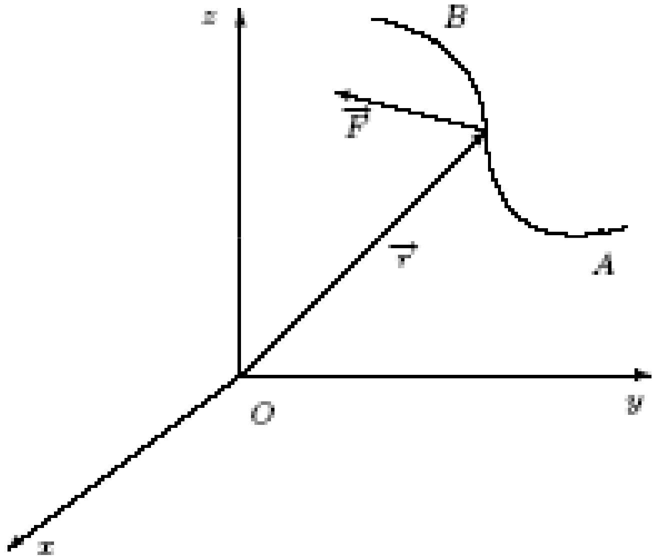
deci o diferenţială totală exactă.

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Lucrul mecanic total (lucrul mecanic al forţei $\overrightarrow{F}$ de-a lungul unui arc finit de curbă AB)

Fie AB un arc de curbă descris de ecuaţiile:

$$x = x(q), \quad y = y(z), \quad z = z(q), \quad q \in [q_0, q_1]. \tag{42}$$



Integrala curbilinie (de speţa a doua)

$$L_{AB} = L := \int_{AB} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{AB} X dx + Y dy + Z dz = \int_{AB} (X(x(q), \ldots) dx(q) + \cdots$$

$$= \int_{q_0}^{q_1} (X(x(q), y(q), z(q)) x'(q) + \cdots) dq \tag{43}$$

se numeşte *lucrul mecanic total al forţei* $\overrightarrow{F}$ (*lucrul mecanic pe arcul* AB).

Dacă $\overrightarrow{F} = \mathrm{grad} U$ ($\overrightarrow{F}$ conservativă), atunci

$$L = \int_{AB} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{AB} dU = U(B) - U(A). \tag{44}$$

Prin urmare, în cazul forţei conservative, lucrul mecanic este independent de drumul care uneşte punctele A şi B şi este egal cu $U(B) - U(A)$.

În caz contrar, avem

$$L = \int_{AB} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{q_0}^{q_1} [X(x(q), y(q), z(q)) x'(q) + \ldots] dq \tag{45}$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Dacă $\overrightarrow{F}$ depinde de *viteză* şi *timp*, se poate utiliza formula (43), iar pentru a transforma integrala curbilinie într-una simplă trebuie cunoscute ecuaţiile de mişcare

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t).$$

Într-adevăr, avem

$$L = \int_{AB} X dx + Y dy + Z dz = \int_{t_0}^{t_1} X(x(t), \ldots)\dot{x}(t) + \ldots \tag{46}$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Exemplu

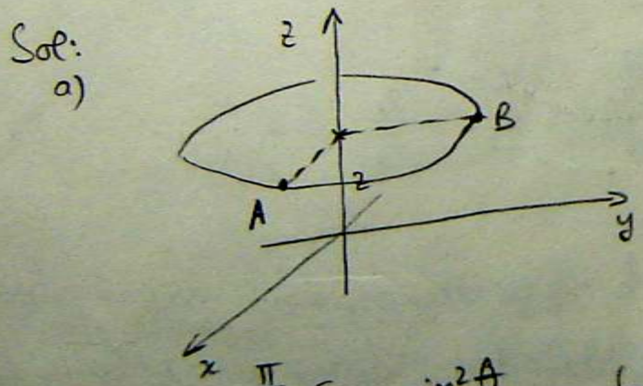
Într-un câmp de forțe definit de relațiile (sub acțiunea unei forțe de componente): $X = \frac{z^2-y^2}{(x+z)^2}$; $Y = \frac{2y}{x+z}$; $Z = \frac{x^2-y^2}{(x+z)^2}$ se mișcă un punct material M de masă egală cu unitatea, descriind curba $(\mathcal{C})$: $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = 2 \end{cases}$.

a) Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ când punctul M descrie arcul curbei $\mathcal{C}$ între punctele $A(\theta = 0)$ și $B(\theta = \frac{\pi}{2})$.

b) Să se arate că $\exists$ o funcție de forță $\mathcal{U}(x,y,z)$ și apoi să se găsească cu ajutorul ei rezultatul de la punctul a).

Sol:

a)



$$L_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{\widehat{AB}} dL$$

$$X = \frac{4-\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^2}\ ;\quad Y = \frac{2\sin\theta}{2+\cos\theta}\ ;\quad Z = \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^2}$$

$$dx = -\sin\theta\,d\theta\ ;\quad dy = \cos\theta\,d\theta\ ,\quad dz = 0.$$

$$L_{\widehat{AB}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{4-\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^2}\cdot(-\sin\theta) + \frac{2\sin\theta}{2+\cos\theta}\cdot\cos\theta\right]d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta - 4\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta(2+\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{(2+\cos\theta)^2}\left[\sin^2\theta - 4 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{(2+\cos\theta)^2}\left[1-\cos^2\theta - 4 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta\right]d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{(2+\cos\theta)^2}\left[\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{(2+\cos\theta)^2}\left[(\cos\theta+2)^2 - 7\right]d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta - 7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{(2+\cos\theta)^2}\,d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{1}{2+\cos\theta}\right) = 1 - 7\cdot\frac{1}{2+\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = {}^{6)}1 - {}^{3/}\frac{7}{2} + {}^{2/}\frac{7}{3} = -\frac{1}{6}$$

b) $\exists\ U(x,y,z)$ a.î. $\vec{F}(x,y,z) = \text{grad}\, U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

Condiții: $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$; $\dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial y}$; $\dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-2y}{(x+z)^2}\ ;\quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-2y}{(x+z)^2} \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{-2y}{(x+z)^2}\ ;\quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{-2y}{(x+z)^2} \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{-2y}{(x+z)^2}\ ;\quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{-2y}{(x+z)^2} \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{2z(x+z)^{\cancel{2}} - 2(z^2-y^2)\cancel{(x+z)}}{(x+z)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2xz + \cancel{2z^2} - \cancel{2z^2} + 2y^2}{(x+z)^3}\ ;\quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{2xz+2y^2}{(x+z)^3} \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{z^2-y^2}{(x+z)^2}\ ;\quad \underbrace{\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x+z}}_{\text{integrăm}}\ ;\quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{x^2-y^2}{(x+z)^2} \qquad (1)$$

Integrăm (3):

$$\varphi(x,z) = -\frac{z^2}{x+z} + \psi(z) \qquad (5)$$

Înlocuim (5) în (4): $\dfrac{-2z(x+z)+z^2}{(x+z)^2} + \psi'(z) = \dfrac{x^2}{(x+z)^2} \Rightarrow \psi'(z) = 1 \Rightarrow \psi(z) = z + C$

Atunci $U(x,y,z) = \dfrac{y^2}{x+z} - \dfrac{z^2}{x+z} + z + C = \dfrac{y^2+xz}{x+z} + \underset{0}{\underset{\parallel}{C}} = \dfrac{y^2+xz}{x+z}$

$$U(\theta) = \frac{\sin^2\theta + 2\cos\theta}{2+\cos\theta}$$

Atunci $L_{\widehat{AB}} = \displaystyle\int_{\widehat{AB}} dU = U_B - U_A = \left.\frac{\sin^2\theta + 2\cos\theta}{2+\cos\theta}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ ✓

4.1 Teorema de conservare a energiei mecanice

Să admitem acum că mişcarea unui punct material de masă m are loc sub acţiunea unui câmp conservativ de forţe $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, deci că există câmpul scalar $V = V(\vec{r})$ astfel încât $\vec{F} = -\text{grad}V$. Prin urmare, lucrul mecanic elementar devine o diferenţială totală exactă

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{x} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}dx_3\right) = -dV, \tag{47}$$

iar ecuaţia (25) conduce la integrala primă

$$T + V = h, \tag{48}$$

numită *integrala energiei*. Funcţia V se numeşte *energie potenţială*, iar funcţia $E = T + V$ *energie mecanică*. Constanta h se determină din condiţiile iniţiale şi se numeşte *constanta energiei*.

Ecuaţia (48) exprimă

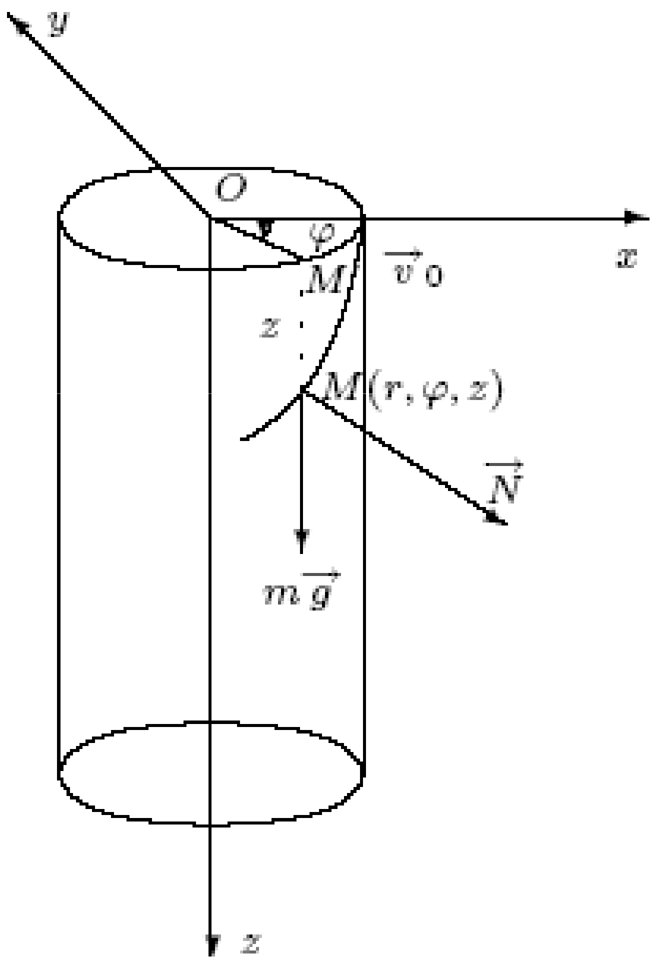
Teorema de conservare a energiei. *Mişcarea unui punct material într-un câmp conservativ de forţe se face astfel încât energia mecanică, adică suma dintre energia cinetică şi energia potenţială a punctului, se conservă.*

Din (48) se deduce că energia cinetică scade când energia potenţială creşte şi invers.

4.2 Probleme

Problema 1. Un punct material de masă m se mişcă pe suprafaţa cilindrului de ecuaţie $f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Considerând suprafaţa cilindrului absolut netedă (mişcare fără frecare), axa cilindrului verticala descendentă Oz şi luând în considerare forţa de greutate, să se determine mişcarea punctului faţă de reperul $Oxyz$ şi reacţiunea $\overrightarrow{R}$ asupra cilindrului. În momentul iniţial punctul se află pe axa Ox şi pleacă cu viteza iniţială $\overrightarrow{v}_0(0, v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$, unde α este un unghi dat, determinat de viteza iniţială $\overrightarrow{v}_0$ cu planul orizontal xOy.

Soluţie. Fie $\vec{R} = \vec{N}$ reacţiunea normală la suprafaţă (mişcarea fără frecare). Atunci avem



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$\vec{N} = \lambda \operatorname{grad} f = \lambda(2x, 2y, 0)$$

$$\vec{v}_0 = (0, v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$$

$$(Oz): \ m\ddot{z} = mg \ \Rightarrow \ z = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

$$z(0) = 0 \ \Rightarrow \ c_2 = 0$$

$$\dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha \ \Rightarrow \ c_1 = v_0 \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \ z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Aplicăm teorema momentului cinetic:

$$\frac{d\overrightarrow{K}_0}{dt} = \overrightarrow{M}_0 = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{N}$$

Proiectăm pe Oz

$$\Rightarrow \frac{dK_{Oz}}{dt} = (\overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{g}) \cdot \overrightarrow{k} + (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{N}) \cdot \overrightarrow{k} = 0$$

pentru că:

$$\overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{g} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & {}^{m}g \end{vmatrix} = mg(y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}) \Rightarrow (\overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{g}) \cdot \overrightarrow{k} = 0$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

$$\overrightarrow{k} \cdot (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{N}) = \lambda \overrightarrow{k} \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = \lambda(2xy - 2xy)\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \; K_{Oz} = c = const, \quad K_{Oz} = r^2\varphi \; \Rightarrow$$

$$r^2\dot{\varphi} = c = |\overrightarrow{r}_0 \times m\overrightarrow{v}_0| = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0 = rv_0 \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \; r^2\dot{\varphi} = rv_0 \sin\alpha \; \Rightarrow \; \dot{\varphi} = \frac{1}{r}v_0 \sin\alpha \; \Rightarrow \; \varphi = \frac{1}{r}v_0 \sin\alpha t + \varphi_0$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

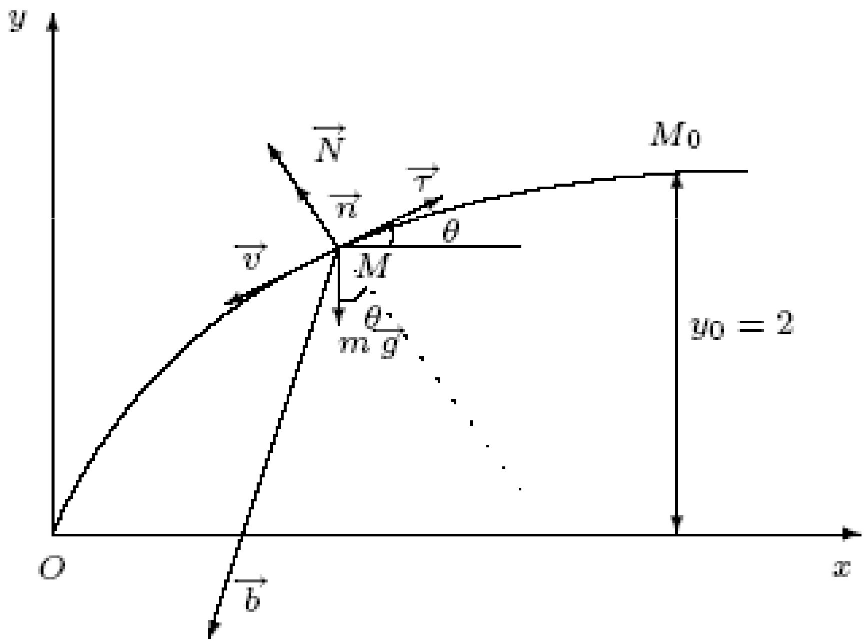
$$\varphi(0) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_0 = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{1}{r} v_0 \sin \alpha t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\left(\dfrac{1}{r} v_0 \sin \alpha t\right) \\ y = r\sin\left(\dfrac{1}{r} v_0 \sin \alpha t\right) \\ z = g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

$$m\ddot{x} = 2\lambda x \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{m\ddot{x}}{2x} = -\frac{m}{2}\frac{1}{r^2} v_0^2 \cos\left(\frac{1}{r} v_0 \sin \alpha t\right) \frac{1}{r\cos\left(\frac{1}{r} v_0 \sin \alpha t\right)} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{N} = \lambda \operatorname{grad} f$$

Problema 2. Pe partea exterioară a unei parabole cu axa orizontală Ox, de ecuaţie $y^2 = 2x$, se rostogoleşte (fără frecare) o sferă grea punctiformă. Viteza iniţială a sferei este nulă, iar ordonata sa iniţială $y_0 = 2$. În ce punct va sări sfera de pe parabolă?

Soluţie. $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N}$ (mişcare fără frecare)



$$y^2 = 2x$$

$$f = 0, \quad \overrightarrow{N} = 0, \quad m\,\overrightarrow{a} = m\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N}$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

$$(\overrightarrow{\tau}):\ m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\theta+0 \quad (\overrightarrow{N}\ \text{reacţiunea normală})$$

$$(\overrightarrow{n}):\ m\frac{v^2}{R}=-mg\cos\theta+N_n=N-mg\cos\theta\ \Rightarrow\ N=\frac{mv^2}{R}+mg\cos\theta$$

$$(\overrightarrow{b}):\ 0=0+N_b\ \Rightarrow\ N_b=0\ \Rightarrow\ N=N_n\ \text{(componenta normală)}$$

$$y=\sqrt{2x},\ y=f(x)\ \Rightarrow\ \frac{1}{R}=\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}=-(2x+1)^{-3/2} \tag{49}$$

$$\text{tg}\ \theta=y'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}\ \Rightarrow$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{2x}{2x+1}} \tag{50}$$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Teorema energiei:

$$dT = \delta L = m\overrightarrow{g} \cdot d\overrightarrow{r} + \overrightarrow{N} \cdot d\overrightarrow{r} = -mgdy \ \Rightarrow \ d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = d(-mgy)$$

$$\Rightarrow \ v^2 - v_0^2 = -2gy + 2gy_0 = 2g(2-y), \ v_0 = 0 \ \Rightarrow$$

$$v^2 = 2g(2-y) \tag{51}$$

(49)+(50)+(51) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} N = \dfrac{m2g(2-y)}{-(2x+1)^{3/2}} + mg\sqrt{\dfrac{2x}{2x+1}} = 0 \\ y = \sqrt{2x} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{2x}(3+2x) = 4 \ \Rightarrow \ x = 1/2, \ y = 1$$