II. ECUAȚIILE MIŞCĂRII. METODA MEDIERII PE VOLUMUL ELEMENTAR REPREZENTATIV

1. Volumul elementar reprezentativ. Restricții

Metoda medierii pe volumul elementar reprezentativ (***R**epresentative **E**lementary **V**olume*) a fost utilizată pentru a obține ecuațiile mişcării macroscopice prin integrarea formală a ecuațiilor mişcării microscopice. Printre primele rezultate în această direcție au fost cele ale lui Slattery (1967) şi Whitaker (1969). Sinteze ale cercetărilor având la bază metoda medierii sunt prezentate în cărțile lui Kaviany (1995) şi Nakayama (1995).

Considerăm mişcarea laminară a unui fluid vâscos incompresibil printr-un mediu poros. Definim o funcție de distribuție a golurilor de forma

$$a(x)=\begin{cases}1 & \text{dacă } x \text{ se află într-o regiune ocupată de fluid}\\ 0 & \text{dacă } x \text{ se află într-o regiune ocupată de solid}\end{cases} \tag{2.1}$$

Ținând cont de definiția porozității volumice

$$\phi=\frac{V_f}{V},\ V=V_f+V_s \tag{2.2}$$

unde V_f este volumul porilor ocupat de fluid şi V este volumul elementar reprezentativ al mediului (fluid + solid) putem defini porozitatea locală

$$\phi(x)=\frac{1}{V}\int_V a(x)dV=\frac{V_f}{V} \tag{2.3}$$

Vom considera, în continuare, o lungime caracteristică microscopică, d, de exemplu diametrul mediu al particulelor solide şi o lungime caracteristică, L, de exemplu lățimea stratului de mediu poros (vezi Fig. 10). Lungimea d este lungimea în care viteza microscopică, v, suferă modificări notabile, iar lungimea L este lungimea în care pentru viteza macroscopică $\langle v\rangle$ există modificări semnificative.

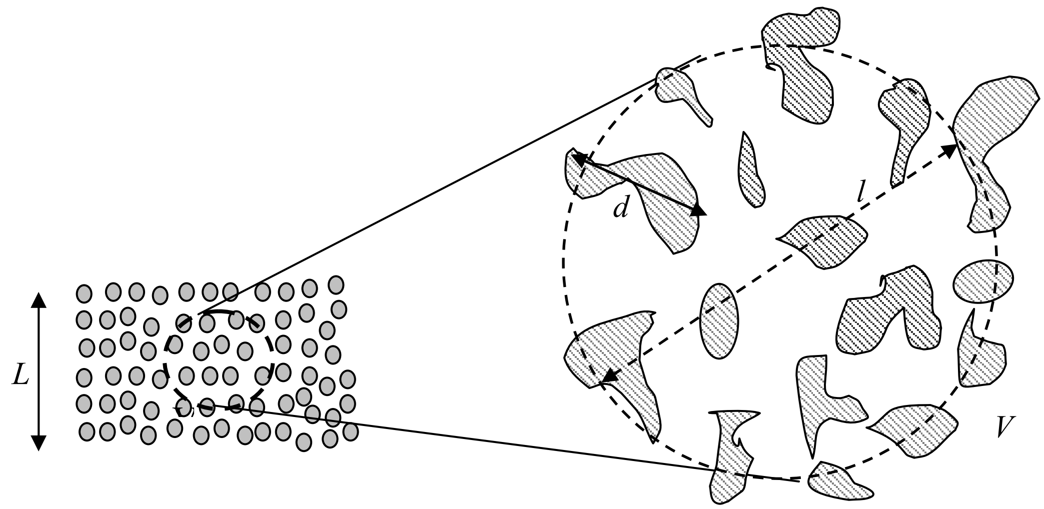

Fig. 10. Caracteristicile volumului elementar reprezentativ.

Considerăm mărimea Ψ (scalar, vector, tensor), ce depinde de punct, asociată fluidului (viteză, densitate, temperatură, etc.) şi definim media ei pe volumul elementar reprezentativ

$$\langle\Psi\rangle = \frac{1}{V}\int_V \Psi dV \tag{2.4}$$

Este necesar sa introducem o nouă lungime caracteristică, l, relativă la dimensiunea volumului elementar reprezentativ V, şi anume, dimensiunea pentru care mărimea mediată $\langle\Psi\rangle$ devine „netedă”, vezi Fig. 10 (Whitaker, 1969) şi vom impune pentru l restricția:

$$d << l \tag{2.5}$$

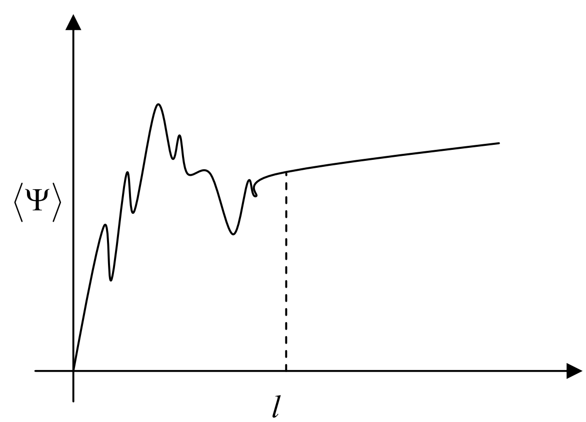

Fig. 11. Semnificația lungimii caracteristice l.

Vom impune o nouă restricţie şi anume ca dubla mediere a unei mărimi Ψ să fie egală cu media lui Ψ, adică:

$$\langle\langle\Psi\rangle\rangle = \langle\Psi\rangle \tag{2.6}$$

unde conform ecuației (2.4) avem

$$\langle\langle\Psi\rangle\rangle = \frac{1}{V}\int_V \langle\Psi\rangle dV \tag{2.7}$$

Considerăm că punctul asociat mărimii $\langle\Psi\rangle$ coincide cu centrul volumului elementar reprezentativ şi dezvoltăm $\langle\Psi\rangle$ în serie Taylor, considerând centrul volumului elementar reprezentativ ca fiind originea sistemului de coordonate:

$$\langle\Psi\rangle = \langle\Psi\rangle_0 + x_i\left(\frac{\partial\langle\Psi\rangle}{\partial x_i}\right)_0 + \frac{x_i x_j}{2!}\left(\frac{\partial^2\langle\Psi\rangle}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 + \frac{x_i x_j x_k}{3!}\left(\frac{\partial^3\langle\Psi\rangle}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 + \dots \tag{2.8}$$

unde x_i reprezintă coordonatele sistemului, iar în relația (2.8) se foloseşte convenția de sumare de la 1 la 3 a indicelui ce se repetă. Indicele 0 reprezintă faptul că funcția este evaluată în origine, adică punctul $x_i = 0$.

Mediem (2.8) folosind relația (2.7) şi avem:

$$\langle\langle\Psi\rangle\rangle = \langle\Psi\rangle_0 + \left(\frac{\partial\langle\Psi\rangle}{\partial x_i}\right)_0 \frac{1}{V}\underbrace{\int_V x_i dV}_{=0} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\langle\Psi\rangle}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 \frac{1}{V}\int_V x_i x_j dV + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\langle\Psi\rangle}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 \frac{1}{V}\int_V x_i x_j x_k dV + \dots \tag{2.9}$$

unde integrala din al doilea termen este nulă datorită simetriei (centrul volumului elementar este originea sistemului de coordonate). Ținând cont de ordinul de mărime al integralei:

$$\frac{1}{V}\int_V x_i x_j dV = O\left(l^2\right) \tag{2.10}$$

de ordinul de mărime al derivatei:

$$\left(\frac{\partial^2\langle\Psi\rangle}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = O\left(\frac{\langle\Psi\rangle}{L^2}\right) \tag{2.11}$$

şi neglijând ceilalți termeni de ordin superior (>2) din ecuațiile (2.8) – (2.11) obținem:

$$\langle\langle\Psi\rangle\rangle = \langle\Psi\rangle + O\left(\langle\Psi\rangle\left(\frac{l}{L}\right)^2\right) \tag{2.12}$$

Este evident că pentru a obține relația (2.6) este necesară restricția:

$$l << L \tag{2.13}$$

2. Medierea operatorului ∇

Pentru medierea ecuațiilor mişcării (Navier-Stokes, Stokes, etc.) este necesar să obținem operatorul gradient (divergență) mediat, $\langle \nabla \rangle$. Urmăm paşii din Kaviany (1995), pornind de la teorema de transport a lui Reynolds:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \Psi\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV + \int_{A(t)} \Psi\, \vec{v}\, \vec{n}\, dA \tag{2.14}$$

şi de la teorema flux-divergență:

$$\int_{V(t)} \nabla \Psi\, dV = \int_{A(t)} \Psi\, \vec{n}\, dA \tag{2.15}$$

unde $V(t)$ este volumul elementar reprezentativ variabil în timp, $A(t)$ este volumului elementar reprezentativ, $\vec{v}$ este viteza fluidului, iar $\vec{n}$ este normala exterioară la frontiera $A(t)$.

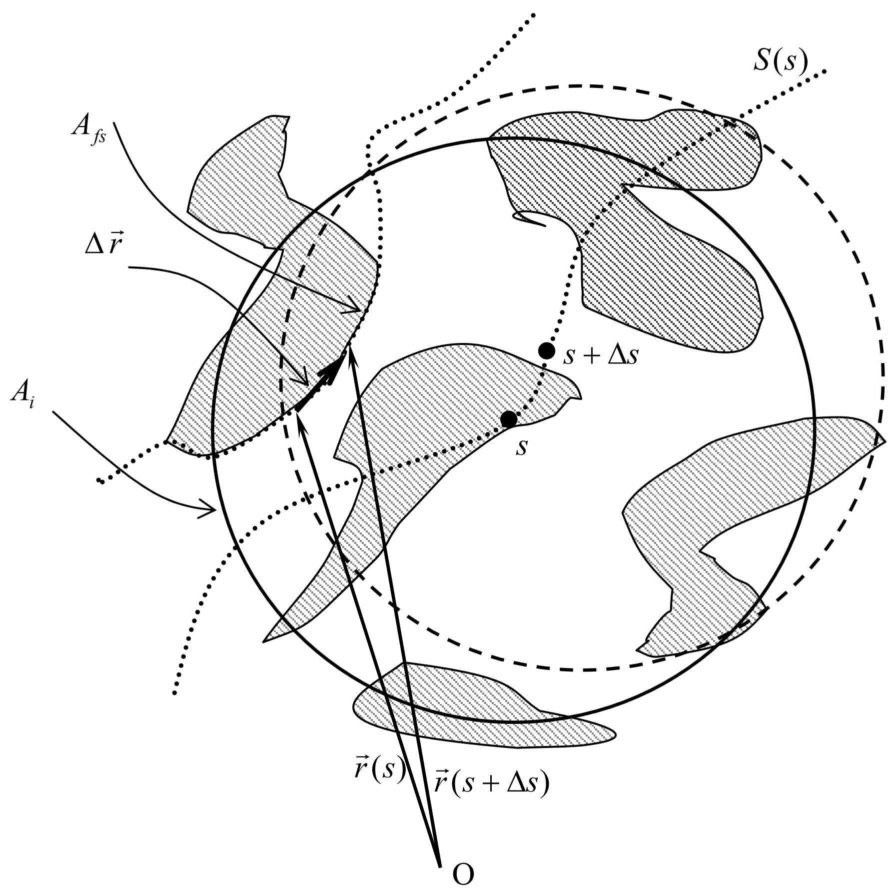

Fig. 12. Caracteristicile elementului de volum, $V(s)$.

Considerăm o curbă $S(s)$, unde s este elementul de arc, ce trece prin punctul $P(s)$ din mediul poros şi în jurul căruia este construit volumul elementar reprezentativ $V(s)$, mărginit de frontiera $A(t)$ (vezi Fig. 12). Vom nota volumul fluidului cu $V_f(s)$, iar partea fluidă a frontierei cu $A_f(s)$. Atunci ecuația (2.14) se scrie pentru domeniul fluid $V_f(s)$ astfel:

$$\frac{d}{ds}\int_{V_f(s)} \Psi\, dV = \int_{V_f(s)} \frac{\partial \Psi}{\partial s} dV + \int_{A_f(s)} \Psi \frac{d\vec{r}}{ds}\vec{n}\, dA \tag{2.16}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție şi deci $\vec{v} = d\vec{r}/ds$. Deoarece $\Psi = \Psi(x_i(s), t)$ atunci:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0; \quad \frac{d\Psi}{ds} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} \tag{2.17}$$

iar ecuația (2.16) devine:

$$\frac{d}{ds}\int_{V_f(s)} \Psi\, dV = \int_{A_f(s)} \Psi \frac{d\vec{r}}{ds}\vec{n}\, dA \tag{2.18}$$

Când curba $S(s)$ se află pe o interfață solid-fluid atunci conform Fig. 12 avem că $\Delta\vec{r} = \vec{r}(s) - \vec{r}(s+\Delta s)$ este tangent la curbă şi interfață şi deci perpendicular pe normala la interfață. Aşadar pe interfața solid-fluid vom avea $d\vec{r}/ds \perp \vec{n}$. Folosind această observație vom diviza frontiera udată de fluid $A_f(s)$ astfel:

$$A_f(s) = A_{fs}(s) + A_i(s) \tag{2.19}$$

unde $A_{fs}(s)$ reprezintă interfața solid-fluid a frontierei, iar $A_i(s)$ reprezintă frontiera de intrare/ieşire a volumului de fluid $V_f(s)$. Ținând cont de observația de mai sus şi de ecuația (2.19), ecuația (2.18) devine:

$$\frac{d}{ds}\int_{V_f(s)} \Psi\, dV = \int_{A_i(s)} \Psi \frac{d\vec{r}}{ds}\vec{n}\, dA \tag{2.20}$$

Pentru un punct Q de pe frontiera $A_f(s)$ vom exprima vectorul de poziție $\vec{r}(s)$ în felul următor:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0(s) + \vec{w}(s) \tag{2.21}$$

unde $\vec{r}_0(s)$ este vectorul de poziție al punctului $P(s)$, centrul elementului de volum, iar $\vec{w}(s)$ este vectorul $\overrightarrow{PQ}$ (vezi Fig. 13). Ținând cont de (2.21) operatorul de derivare după arcul s devine:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\vec{r}_0}{ds}\cdot\nabla \tag{2.22}$$

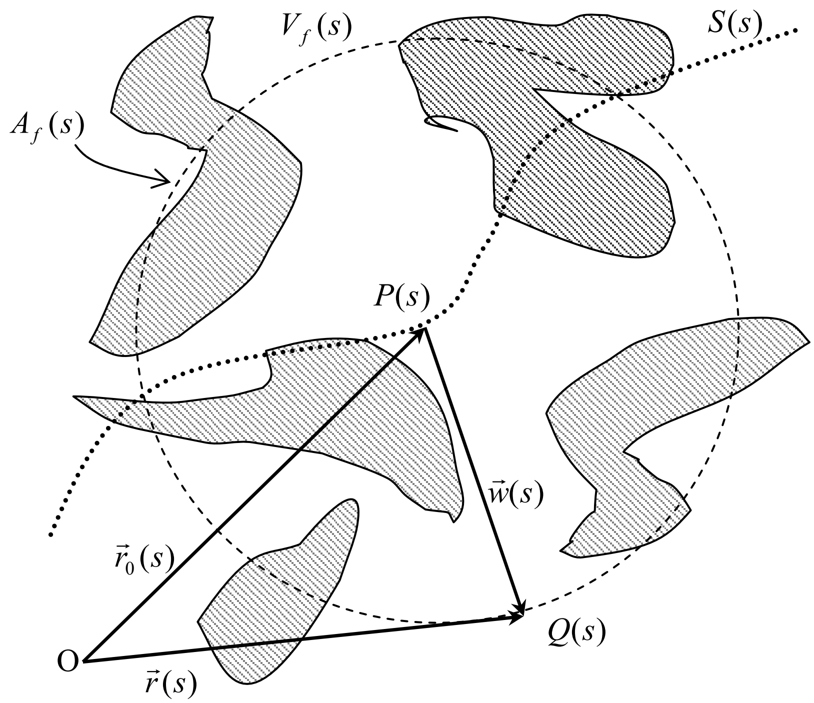

Fig. 13. Descompunerea vectorului $\vec{r}(s)$.

Folosind (2.22) în (2.20), obținem:

$$\frac{d\,\vec{r}_0}{ds}\cdot\nabla\int_{V_f(s)}\Psi\,dV=\int_{A_i(s)}\Psi\left[\frac{d\,\vec{r}_0}{ds}+\frac{d\,\vec{w}}{ds}\right]\vec{n}\,dA \tag{2.23}$$

În ecuația (2.23) $d\,\vec{r}_0/ds$ nu depinde de limitele de integrare şi atunci se poate da factor comun, iar printr-un raționament asemănător celui în care am arătat că $d\,\vec{r}/ds\perp\vec{n}$ se obține că $d\,\vec{w}/ds\perp\vec{n}$. Aşadar ecuația (2.23) devine:

$$\frac{d\,\vec{r}_0}{ds}\cdot\left(\nabla\int_{V_f(s)}\Psi\,dV-\int_{A_i(s)}\Psi\;\vec{n}\,dA\right)=\int_{A_i(s)}\Psi\,\frac{d\,\vec{w}}{ds}\vec{n}\,dA=0$$

şi renunțând la dependența lui V_f şi A_f de s , avem (vezi Whitaker, 1969):

$$\nabla\int_{V_f}\Psi\,dV=\int_{A_i}\Psi\;\vec{n}\,dA \tag{2.24}$$

Ținând cont de (2.19) exprimăm teorema flux-divergență (2.15) sub forma:

$$\int_{V_f}\nabla\Psi\,dV=\int_{A_{fs}}\Psi\;\vec{n}\,dA+\int_{A_i}\Psi\;\vec{n}\,dA \tag{2.25}$$

şi utilizând-o în ecuația (2.24), avem:

$$\int_{V_f}\nabla\Psi\,dV=\nabla\int_{V_f}\Psi\,dV+\int_{A_{fs}}\Psi\;\vec{n}\,dA \tag{2.26}$$

Împărțim ecuația (2.26) cu V , volumul elementar reprezentativ, şi folosind definiția operatorului de mediere (2.4) ecuația (2.26) devine:

$$\frac{1}{V}\int_{V_f} \nabla \Psi \, dV = \nabla \frac{1}{V}\int_{V_f} \Psi \, dV + \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} \Psi \; \vec{n} \, dA$$

adică

$$\langle \nabla \Psi \rangle = \nabla \langle \Psi \rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} \Psi \; \vec{n} \, dA \tag{2.27}$$

Trebuie remarcat faptul că pentru obținerea ecuației (2.27) volumul de mediere V este considerat constant ca mărime si orientare.

2. Ecuația de continuitate

Considerăm ecuația de continuitate

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + \nabla(\rho \, \vec{v}) = 0 \tag{2.28}$$

Aplicăm acestei ecuații operatorul de mediere (2.4) şi ținând seama de ecuația (2.27) avem:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \mathrm{t}} + \nabla \langle \rho \, \vec{v} \rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} (\rho \, \vec{v}) \vec{n} \, dA = 0 \tag{2.29}$$

Folosind condiția de aderență a fluidului vâscos pe frontieră (interfața fluid-solid), $\vec{v}\big|_{A_{fs}} = 0$, ecuația (2.29) devine:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \mathrm{t}} + \nabla \langle \rho \, \vec{v} \rangle = 0 \tag{2.30}$$

iar pentru fluidul vâscos incompresibil ($\rho = \text{constant}$) avem:

$$\nabla \langle \rho \, \vec{v} \rangle = 0 \tag{2.31}$$

3. Legea lui Darcy

Whitaker (1961) a obținut legea lui Darcy teoretic folosind medierea pe volumul elementar reprezentativ. Având în vedere mişcările lente în mediile poroase considerăm ecuația lui Stokes pentru un fluid vâscos incompresibil în prezența câmpului gravitațional

$$0 = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v} \tag{2.32}$$

Introducem presiunea piezometrică

$$P = p - p_0 + \rho \Phi \tag{2.33}$$

unde Φ este potențialul gravitațional ($\vec{g} = -\nabla\Phi$) ales astfel încât $\Phi = 0$ atunci când presiunea p este egală cu presiunea de referință p_0. Ecuația lui Stokes devine:

$$0 = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} \tag{2.34}$$

Aplicăm operatorul divergență ecuației (2.34):

$$0 = -\nabla \cdot (\nabla P) + \mu \nabla \cdot \left(\nabla^2 \vec{v}\right)$$

şi ținând cont că $\nabla \cdot \left(\nabla^2 \vec{v}\right) = \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{v})$ şi de ecuația de continuitate $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, avem:

$$\nabla^2 P = 0 \tag{2.35}$$

Dacă aplicăm laplaceanul ecuației (2.34) obținem:

$$0 = -\nabla^2 (\nabla P) + \mu \nabla^4 \vec{v}$$

şi ținând cont că $\nabla^2 (\nabla P) = \nabla\left(\nabla^2 P\right)$ şi de ecuația (2.35) avem că viteza satisface ecuația biarmonică:

$$\nabla^4 \vec{v} = 0 \tag{2.36}$$

De asemenea viteza trebuie să satisfacă condiția de aderență pe interfața solid-fluid A_{fs} a elementului de volum V

$$\vec{v} = 0 \qquad \text{pe} \quad A_{fs} \tag{2.37}$$

iar pe porțiunea de intrare/ieşire A_i a frontierei elementului de volum V considerăm:

$$\vec{v} = \vec{f}(\vec{r}) \qquad \text{pe} \quad A_i \tag{2.38}$$

Ecuația (2.36) împreună cu condițiile pe frontieră (2.37) şi (2.38) şi ecuația de continuitate au soluție unică (vezi Ladyzhenskaya, 1969) şi, deci, aceste ecuații sunt suficiente pentru a determina viteza de filtrație $\langle \vec{v} \rangle$ corespunzătoare elementului de volum V. Astfel viteza de filtrație va depinde de vectorul de poziție $\vec{r}_0$ asociat elementului de volum şi anume:

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{g}(\vec{r}_0) \tag{2.39}$$

Deoarece atât viteza fluidului $\vec{v}$ cât şi viteza de filtraţie $\langle\vec{v}\rangle$ sunt continue atunci există tensorul de transformare $\mathbf{M}$, unic determinat, astfel încât

$$\vec{v} = \mathbf{M}\langle\vec{v}\rangle \tag{2.40}$$

Folosind (2.40) în ecuaţia (2.36) obţinem:

$$\left(\nabla^4\mathbf{M}\right)\langle\vec{v}\rangle + \mathbf{M}\left(\nabla^4\langle\vec{v}\rangle\right) = 0 \tag{2.41}$$

şi având în vedere că mişcarea fluidului în mediul poros este lentă (viteza de filtraţie, $\langle\vec{v}\rangle$, este mică) al doilea termen din ecuaţie este neglijabil, iar ecuaţia (2.41) devine:

$$\nabla^4\mathbf{M} = 0 \tag{2.42}$$

Ţinând cont de condiţiile pe frontieră ale vitezei şi de faptul că viteza $\langle\vec{v}\rangle$ depinde de $\vec{r}_0$ atunci avem:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} = 0 \quad \text{pe} \quad A_{fs} \\ &\mathbf{M} = \mathbf{I} \quad \text{in} \quad \vec{r}_0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

unde $\mathbf{I}$ este tensorul unitate.

Considerăm o curbă $S(s)$ care străbate porţiunea fluidă a elementului de volum. Înmulţim scalar ecuaţia (2.34) cu $\vec{\tau}_s$, tangenta la curba S şi obţinem:

$$0 = -\vec{\tau}_s \cdot \nabla P + \mu\,\vec{\tau}_s \cdot \nabla^2\vec{v} \tag{2.44}$$

Având în vedere formula de derivare după o direcţie, $\dfrac{d}{ds} = \vec{\tau}_s \cdot \nabla$, şi de (2.40), ecuaţia (2.44) devine:

$$\frac{dP}{ds} = \mu\,\vec{\tau}_s \cdot \left(\nabla^2\mathbf{M}\langle\vec{v}\rangle + \mathbf{M}\nabla^2\langle\vec{v}\rangle\right) \tag{2.45}$$

Deoarece viteza de filtraţie este mică neglijăm termenul $\mathbf{M}\nabla^2\langle\vec{v}\rangle$, iar ecuaţia (2.45) devine:

$$\frac{dP}{ds} = \mu\,\vec{\tau}_s \cdot \nabla^2\mathbf{M}\langle\vec{v}\rangle \tag{2.46}$$

Integrăm ecuaţia (2.46) de-a lungul curbei S şi, ţinând cont că $\langle\vec{v}\rangle$ este constantă în elementul de volum, obţinem:

$$P(\vec{r}) = P_0 + \mu\left(\int_{\eta=0}^{\eta=s(\vec{r})} \vec{\tau}_s \nabla^2\mathbf{M}\, d\eta\right) \cdot \langle\vec{v}\rangle$$

sau făcând abstracție de o constantă aditivă:

$$P(\vec{r}) = -\mu\,\vec{m}\cdot\langle\vec{v}\rangle \tag{2.48}$$

unde $\vec{m}$ depinde de structura mediului poros şi de vectorul de poziție $\vec{r}$.

Înlocuim în relația (2.24) pe Ψ în membrul drept cu P, iar în membrul stâng cu $-\mu\,\vec{m}\cdot\langle\vec{v}\rangle$ şi obținem:

$$\nabla\frac{1}{V}\int_{V_f} P(\vec{r})\,dV = -\frac{1}{V}\int_{A_i} \mu\,\vec{m}\langle\vec{v}\rangle\vec{n}\,dA$$

ceea ce se poate scrie:

$$\nabla\langle P\rangle = -\mu\,\mathbf{K}^*\langle\vec{v}\rangle \tag{2.48}$$

unde

$$\mathbf{K}^* = \frac{1}{V}\int_{A_i}\vec{n}\cdot\vec{m}\,dA = -\frac{1}{V}\int_{A_i}\vec{n}\cdot\left(\int_{\eta=0}^{\eta=s(\vec{r})}\vec{\tau}_s\nabla^2\mathbf{M}\,d\eta\right)dA \tag{2.49}$$

Dacă $\mathbf{K}^*$ este inversabil, adică există $\mathbf{K} = \left(\mathbf{K}^*\right)^{-1}$, atunci ecuația (2.48) devine:

$$\langle\vec{v}\rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\mu}\nabla\langle P\rangle \tag{2.50}$$

Ținând cont că presiunea piezometrică P este dată de relația (2.33), ecuația (2.50) devine:

$$\langle\vec{v}\rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\mu}\nabla\left(\langle p - p_0\rangle + \rho\langle\Phi\rangle\right) \tag{2.51}$$

Dar potențialul gravitațional este $\Phi = -\vec{r}\cdot\vec{g}$ şi atunci:

$$\langle\Phi\rangle = -\frac{1}{V}\int_{V_f}\vec{r}\cdot\vec{g}\,dV = -\phi\,\vec{r}_0\cdot\vec{g} \tag{2.52}$$

unde am considerat accelerația gravitațională $\vec{g}$ constantă şi am aplicat o teoremă de medie, $\vec{r}_0$ fiind vectorul de poziție asociat centrului elementului de volum V.

De asemenea, din considerente practice, experimental se poate determina presiunea intrinsecă

$$\langle p - p_0\rangle_f = \frac{1}{V_f}\int_{V_f}(p - p_0)\,dV = \frac{1}{\phi}\langle p - p_0\rangle \tag{2.53}$$

şi folosind (2.53) în ecuația (2.51) şi ținând cont şi de (2.52) obținem:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla \left(\phi \langle p - p_0 \rangle_f - \phi \rho \vec{r}_0 \vec{g} \right) \tag{2.54}$$

Dar

$$\nabla \left(-\phi \rho \vec{r}_0 \vec{g} \right) = -\phi \rho \vec{g} \nabla \vec{r}_0 - \rho \vec{r}_0 \vec{g} \nabla \phi = -\phi \rho \vec{g} - \rho \vec{r}_0 \vec{g} \nabla \phi \tag{2.55}$$

unde $\nabla \vec{r}_0 = \mathbf{I}$ (tensorul unitate). Atunci ecuația (2.54) se poate scrie astfel:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \left[\phi \left(\nabla \langle p - p_0 \rangle_f - \rho \vec{g} \right) + \left(\langle p - p_0 \rangle_f - \rho \vec{r}_0 \vec{g} \right) \nabla \phi \right]$$

şi pentru $\nabla \phi = 0$, ceea ce înseamnă că modificarea porozității în elementul de volum este nesemnificativă, obținem:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{\phi \mathbf{K}}{\mu} \nabla \langle p - p_0 \rangle_f - \rho \vec{g} \tag{2.56}$$

Se observă că ecuația (2.56) este similară cu ecuația lui Darcy, între permeabilitățile celor două ecuații existând relația $\mathbf{K}_{Darcy} = \phi \mathbf{K}$. O derivare mai amănunțită şi mai riguroasă a ecuației (2.57) este dată de către Whitaker (1986).

4. Medierea ecuației lui Navier-Stokes

Ecuația Brinkman-Forchheimer poate fi obținută prin medierea formală a ecuației lui Navier-Stokes (vezi Vafai şi Tien, 1981):

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \rho \vec{g} + \nabla \mathbf{T} \tag{2.57}$$

$\mathbf{T}$ fiind tensorul tensiunilor de componente (vezi Kohr, 2000):

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1,3 \tag{2.58}$$

unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Aplicăm ecuației (2.57) formula de mediere (2.4) pentru un volum elementar reprezentativ V şi obținem:

$$\rho\left(\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t}+\langle\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\rangle\right)=\rho\langle\vec{g}\rangle+\nabla\langle\mathbf{T}\rangle+\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\mathbf{T}\vec{n}dA \tag{2.59}$$

unde pentru media termenului $\langle\nabla\mathbf{T}\rangle$ am aplicat formula (2.27). Rescriem ecuația (2.59) pe componente şi ținând cont de (2.58) avem:

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial\langle v_i\rangle}{\partial t}+\left\langle v_j\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\rangle\right)=\rho\langle g_i\rangle-\phi\frac{\partial\langle p\rangle_f}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\langle v_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle v_j\rangle}{\partial x_i}\right)+\\+\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)dA_j-pdA_i\right]\end{aligned} \tag{2.60}$$

Pentru medierea unui produs $\langle ab\rangle$ vom folosi o procedură similară cu medierea din mişcările turbulente, vezi Nakayama (1995):

$$\langle ab\rangle=\frac{1}{\phi}\langle a\rangle\langle b\rangle+\langle a'b'\rangle \tag{2.61}$$

Aplicând formula (2.61) celui de-al doilea termen din membrul stâng al ecuației (2.60) şi ținând cont că accelerația gravitațională este constantă în V obținem:

$$\rho\left(\frac{\partial\langle v_i\rangle}{\partial t}+\frac{1}{\phi}\langle v_j\rangle\frac{\partial\langle v_i\rangle}{\partial x_j}\right)=\rho\phi g_i-\phi\frac{\partial\langle p\rangle_f}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\langle v_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle v_j\rangle}{\partial x_i}\right)+\phi S_i \tag{2.62}$$

unde

$$S_i=\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)dA_j-pdA_i\right]-\frac{\rho}{\phi}\left\langle v_j'\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right\rangle \tag{2.63}$$

Revenind la forma vectorială, ecuația (2.63) devine:

$$\frac{\rho}{\phi}\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t}+\frac{\rho}{\phi^2}\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla\langle\vec{v}\rangle=-\nabla\langle p\rangle_f+\rho\vec{g}+\frac{\mu}{\phi}\Delta\langle\vec{v}\rangle+\vec{S} \tag{2.64}$$

Pentru a determina o formă mai simplă a lui $\vec{S}$, Vafai şi Tien (1981) au făcut observația că primul termen din ecuația (2.63) este de fapt media intrinsecă a tuturor forțelor ce acționează în structura poroasă, pe când al doilea termen reprezintă o dispersie a inerției, fenomen similar în cazul mişcărilor turbulente. Aşadar $\vec{S}$ reprezintă rezistența structurii solide la curgerea prin mediul poros şi considerând o măsură a acestei rezistențe gradientul de presiune din ecuația lui Forchheimer:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\langle\vec{v}\rangle - \frac{c_F}{\sqrt{K}}\rho\left|\langle\vec{v}\rangle\right|\langle\vec{v}\rangle \tag{2.65}$$

Vafai şi Tien (1981) obţin că:

$$\vec{S} = -\frac{\mu}{K}\langle\vec{v}\rangle - \frac{c_F}{\sqrt{K}}\rho\left|\langle\vec{v}\rangle\right|\langle\vec{v}\rangle \tag{2.66}$$

Folosind relaţia (2.66) în ecuaţia (2.64) ecuaţia mişcării în mediul poros devine:

$$\frac{\rho}{\phi}\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t} + \frac{\rho}{\phi^2}\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla\langle\vec{v}\rangle = -\nabla\langle p\rangle_f + \rho\,\vec{g} + \frac{\mu}{\phi}\Delta\langle\vec{v}\rangle - \frac{\mu}{K}\langle\vec{v}\rangle - \frac{c_F}{\sqrt{K}}\rho\left|\langle\vec{v}\rangle\right|\langle\vec{v}\rangle \tag{2.67}$$

Membrul stâng al ecuaţiei (2.67) este cunoscut sub numele de *termen inerţial convectiv*, iar ultimii trei termeni din membrul drept al ecuaţiei reprezintă *termenul Brinkman, termenul Darcy* şi *termenul Forchheimer*. Se observă că dacă permeabilitatea creşte şi porozitatea se apropie de unitate (din mediul poros rămâne doar faza fluidă) ecuaţia (2.67) se reduce la ecuaţia lui Navier Stokes. De asemenea, dacă termenul inerţial convectiv este neglijat (viteza de filtraţie şi variaţia în timp a acesteia este mică) se obţine extensia Brinkman - Forchheimer a ecuaţiei lui Darcy.

4. Medierea ecuaţiei energiei

Considerăm ecuaţia energiei pentru un fluid vâscos incompresibil:

$$\rho\, c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla T\right) = \nabla\left(k\nabla T\right) \tag{2.68}$$

unde c_p este căldura specifică la presiune constantă, iar k este conductivitatea termică. Considerăm de asemenea că faza fluidă şi faza solidă sunt în echilibru termic local, adică în volumul elementar reprezentativ, $V = V_f + V_s$, format din volumul ocupat de faza fluidă V_f şi faza solidă V_s are loc relaţia:

$$\frac{1}{V_f}\int_{V_f} T_{fluid}\, dV = \frac{1}{V_s}\int_{V_s} T_{solid}\, dV = \frac{1}{V}\int_V T dV \tag{2.69}$$

sau

$$\langle T\rangle_f = \langle T\rangle_s = \langle T\rangle \tag{2.70}$$

unde prin $\langle\ \rangle_f$ şi $\langle\ \rangle_s$ am notat operatorul de mediere intrinsecă pentru faza fluidă, respectiv faza solidă. Rescriem ecuația (2.68) pentru faza fluidă

$$\left(\rho c_p\right)_{fluid}\left(\frac{\partial T_{fluid}}{\partial t}+\nabla\left(\vec{v}\,T_{fluid}\right)\right)=\nabla\left(k_{fluid}\nabla T_{fluid}\right) \tag{2.71}$$

unde în exprimarea termenului convectiv am folosit ecuația de continuitate, $\nabla\vec{v}=0$, şi proprietățile operatorului ∇, $\nabla\left(\vec{v}\,T\right)=T\,\nabla\vec{v}+\vec{v}\,\nabla T=\vec{v}\,\nabla T$. Aplicăm operatorul de mediere (2.4) ecuației (2.71) şi obținem:

$$\left(\rho c_p\right)_{fluid}\left(\left\langle\frac{\partial T_{fluid}}{\partial t}\right\rangle+\left\langle\nabla\left(\vec{v}\,T_{fluid}\right)\right\rangle\right)=\left\langle\nabla\left(k_{fluid}\nabla T_{fluid}\right)\right\rangle \tag{2.72}$$

Vom analiza în continuare termenii ecuației (2.72). Astfel pentru primul termen obținem:

$$\left\langle\frac{\partial T_{fluid}}{\partial t}\right\rangle=\frac{1}{V}\int_{V_f}\frac{\partial T_{fluid}}{\partial t}dV=\frac{V_f}{V}\frac{1}{V_f}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_f}T_{fluid}dV=\phi\frac{\partial\left\langle T\right\rangle_f}{\partial t} \tag{2.73}$$

Exprimăm al doilea termen folosind formula (2.27) şi ținând cont de condiția de aderență a fluidului la interfața fluid solid A_{fs} ($\left.\vec{v}\right|_{A_{fs}}=0$) obținem:

$$\left\langle\nabla\left(\vec{v}\,T_{fluid}\right)\right\rangle=\nabla\left(\left\langle\vec{v}\,T_{fluid}\right\rangle\right)+\underbrace{\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\vec{n}_{fs}\vec{v}T_{fluid}\,dA}_{=0}=\nabla\left(\left\langle\vec{v}\,T_{fluid}\right\rangle\right) \tag{2.74}$$

unde $\vec{n}_{fs}$ este normala exterioară la A_{fs} a domeniului fluid (vezi, Fig. 14). În continuare folosim formula (2.61) şi ecuația continuității (2.31) în ecuația (2.74) şi pentru o porozitate constantă avem:

$$\begin{aligned}\left\langle\nabla\left(\vec{v}\,T_{fluid}\right)\right\rangle=\nabla\left(\left\langle\vec{v}\,T_{fluid}\right\rangle\right)&=\nabla\left(\frac{1}{\phi}\left\langle\vec{v}\right\rangle\left\langle T_{fluid}\right\rangle+\left\langle\vec{v}'T'_{fluid}\right\rangle\right)=\\&=\frac{1}{\phi}\left(\left\langle\vec{v}\right\rangle\nabla\left\langle T_{fluid}\right\rangle+T_{fluid}\nabla\left\langle\vec{v}\right\rangle\right)+\nabla\left\langle\vec{v}'T'_{fluid}\right\rangle=\\&=\frac{1}{\phi}\left\langle\vec{v}\right\rangle\nabla\left\langle T_{fluid}\right\rangle+\nabla\left\langle\vec{v}'T'_{fluid}\right\rangle=\\&=\frac{1}{\phi}\left\langle\vec{v}\right\rangle\frac{V_f}{V}\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}T_{fluid}dV+\nabla\left\langle\vec{v}'T'_{fluid}\right\rangle=\\&=\left\langle\vec{v}\right\rangle\nabla\left\langle T\right\rangle_f+\nabla\left\langle\vec{v}'T'_{fluid}\right\rangle\end{aligned} \tag{2.75}$$

Termenului din membrul drept îi aplicăm formula (2.27):

$$\left\langle\nabla\left(k_{fluid}\nabla T_{fluid}\right)\right\rangle=\nabla\left\langle k_{fluid}\nabla T_{fluid}\right\rangle+\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\vec{n}_{fs}k_{fluid}\nabla T_{fluid}\,dA \tag{2.76}$$

Aplicăm din nou formula (2.27) primul termen din membrul drepta al ecuației (2.76) şi pentru o porozitate constantă avem:

$$\begin{aligned}\left\langle k_{fluid}\nabla T_{fluid}\right\rangle &= k_{fluid}\left(\nabla\left\langle T_{fluid}\right\rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} \vec{n}_{fs}T_{fluid}\,dA\right) = \\ &= k_{fluid}\left[\nabla\left(\frac{V_f}{V}\frac{1}{V_f}\int_{V_f} T_{fluid}\,dV\right) + \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} \vec{n}_{fs}T_{fluid}\,dA\right] = \\ &= k_{fluid}\left[\nabla\left(\phi\left\langle T\right\rangle_f\right) + \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} \vec{n}_{fs}T_{fluid}\,dA\right] = \\ &= k_{fluid}\left(\phi\nabla\left\langle T\right\rangle_f + \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} \vec{n}_{fs}T_{fluid}\,dA\right)\end{aligned} \tag{2.77}$$

Ținând cont de (2.77) ecuația (2.76) devine:

$$\left\langle\nabla\left(k_{fluid}\nabla T_{fluid}\right)\right\rangle = \nabla\left(k_{fluid}\,\phi\nabla\left\langle T\right\rangle_f + \frac{k_{fluid}}{V}\int_{A_{fs}} \vec{n}_{fs}T_{fluid}\,dA\right) + \frac{k_{fluid}}{V}\int_{A_{fs}} \vec{n}_{fs}\nabla T_{fluid}\,dA \tag{2.78}$$

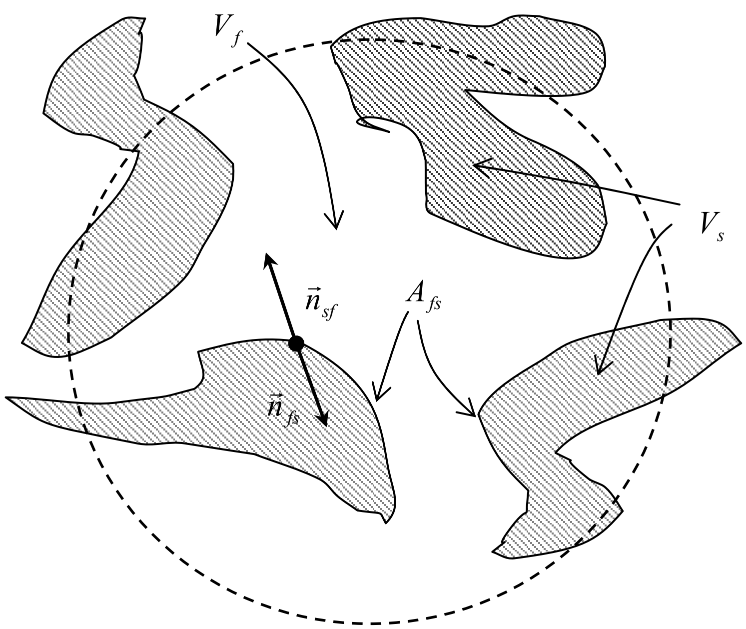

Fig. 14. Normalele $\vec{n}_{fs}$ şi $\vec{n}_{sf} = -\vec{n}_{fs}$ la interfața fluid solid A_{fs}.

Introducând relațiile (2.73), (2.75) şi (2.78) în ecuația (2.72) obținem ecuația mediată a energiei pentru faza fluidă:

$$\left(\rho c_p\right)_{fluid}\left(\phi\frac{\partial\langle T\rangle_f}{\partial t}+\langle\vec{v}\rangle\nabla\langle T\rangle_f\right)=\nabla\left(k_{fluid}\,\phi\nabla\langle T\rangle_f\right)+\nabla\left(k_{fluid}\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\vec{n}_{fs}\,T_{fluid}\,dA\right)-$$
$$-\left(\rho c_p\right)_{fluid}\nabla\left\langle\vec{v}'T'_{fluid}\right\rangle+\frac{k_{fluid}}{V}\int_{A_{fs}}\vec{n}_{fs}\,\nabla T_{fluid}\,dA \tag{2.79}$$

În continuare rescriem ecuația (2.68) pentru faza solidă şi aplicăm operatorul de mediere:

$$\left(\rho c_p\right)_{solid}\left\langle\frac{\partial T_{solid}}{\partial t}\right\rangle=\left\langle\nabla\left(k_{solid}\nabla T_{solid}\right)\right\rangle \tag{2.80}$$

şi procedând la fel ca şi în cazul fazei fluide obținem:

$$\left\langle\frac{\partial T_{solid}}{\partial t}\right\rangle=\frac{1}{V}\int_{V_s}\frac{\partial T_{solid}}{\partial t}dV=\frac{V_s}{V}\frac{1}{V_s}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_s}T_{solid}\,dV=\left(1-\phi\right)\frac{\partial\langle T\rangle_s}{\partial t} \tag{2.81}$$

$$\left\langle\nabla\left(k_{solid}\nabla T_{solid}\right)\right\rangle=\nabla\left(k_{solid}\left(1-\phi\right)\nabla\langle T\rangle_s+\frac{k_{solid}}{V}\int_{A_{fs}}\vec{n}_{sf}T_{solid}\,dA\right)+\frac{k_{solid}}{V}\int_{A_{fs}}\vec{n}_{sf}\,\nabla T_{solid}\,dA \tag{2.82}$$

unde $\vec{n}_{sf}=-\vec{n}_{fs}$ este normala exterioară a frontierei A_{fs} având direcția de la solid înspre fluid.

Introducând ecuațiile (2.81) şi (2.82) în ecuația (2.80) obținem ecuația mediată a energiei pentru faza solidă:

$$\left(\rho c_p\right)_{solid}\left(1-\phi\right)\frac{\partial\langle T\rangle_s}{\partial t}=\nabla\left(k_{solid}\left(1-\phi\right)\nabla\langle T\rangle_s\right)+\nabla\left(k_{solid}\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\vec{n}_{sf}\,T_{solid}\,dA\right)+\frac{k_{solid}}{V}\int_{A_{fs}}\vec{n}_{sf}\,\nabla T_{solid}\,dA \tag{2.83}$$

Ținând cont de condiția de echilibru termic local dată de ecuația (2.70) putem aduna ecuațiile (2.79) şi (2.83) obținând:

$$\left[\phi\left(\rho c_p\right)_{fluid}+\left(1-\phi\right)\left(\rho c_p\right)_{solid}\right]\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial t}+\left(\rho c_p\right)_{fluid}\langle\vec{v}\rangle\nabla\langle T\rangle=\nabla\left[\left(\phi k_{fluid}+\left(1-\phi\right)k_{solid}\right)\nabla\langle T\rangle\right]+$$
$$+\nabla\left(\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\left(k_{fluid}-k_{solid}\right)\vec{n}_{fs}\,T_{fluid}\,dA\right)-\left(\rho c_p\right)_{fluid}\nabla\left\langle\vec{v}'T'_{fluid}\right\rangle+ \tag{2.84}$$
$$+\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\left(k_{fluid}\vec{n}_{fs}\,\nabla T_{fluid}+k_{solid}\vec{n}_{sf}\,\nabla T_{solid}\right)dA$$

Primii doi termeni din membrul drept reprezintă efectul difuziei moleculare astfel încât introducând o conductivitate efectivă k_e putem scrie:

$$\left(\phi k_{fluid}+\left(1-\phi\right)k_{solid}\right)\nabla\langle T\rangle+\left(\frac{1}{V}\int_{A_{fs}}\left(k_{fluid}-k_{solid}\right)\vec{n}_{fs}\,T_{fluid}\,dA\right)=k_e\nabla\langle T\rangle \tag{2.85}$$

Al doilea termen din (2.85) este numit termen de turtozitate şi reprezintă modificările difuziei termice datorate microstructurii mediului. Se observă că dacă cantitatea de sub integrală este constantă atunci integrala este nulă. În general, acest termen este foarte mic şi se neglijează considerându-se:

$$k_e = \phi\, k_{fluid} + (1-\phi) k_{solid} \tag{2.86}$$

Al treilea termen din membrul drept al ecuației (2.84) este un termen dispersiv similar cu cel din cazul transferului de căldură turbulent (vezi Nakayama, 1995):

$$-(\rho c_p)_{fluid} \nabla \langle \vec{v}' T'_{fluid} \rangle = -k_d \nabla \langle T \rangle \tag{2.87}$$

unde k_d reprezintă conductivitatea dispersivă. Având în vedere că T'_{fluid} reprezintă abaterea temperaturii de la temperatura mediată şi că $\vec{v}'$ reprezintă abaterea de la viteza de filtrație, termenul dispersiv se poate neglija pentru valori de ordin mediu ale vitezei şi porozității.

Având în vedere condțiile de pe interfața fluid solid A_{fs} (continuitatea temperaturii si a fluxului temperaturii):

$$\begin{aligned} T_{fluid} &= T_{solid} \\ \vec{n}_{fs}\, k_{fluid} \nabla T_{fluid} &= \vec{n}_{sf}\, k_{solid} \nabla T_{solid} \end{aligned} \tag{2.88}$$

şi ecuațiile (2.85), (2.86) şi (2.87) ecuația (2.84) devine:

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + (\rho c_p)_{fluid} \langle \vec{v} \rangle \nabla \langle T \rangle = \nabla \left[(k_e + k_d) \nabla \langle T \rangle \right] \tag{2.89}$$

unde

$$(\rho c_p)_m = \phi (\rho c_p)_{fluid} + (1-\phi)(\rho c_p)_{solid} \tag{2.90}$$

Dacă nu are loc echilibrul termic local, adică ecuația(2.70) nu are loc, atunci pentru modelarea transferului de caldură, neglijand termenii de turtozitate si termenul dispersiv, vom avea câte o ecuație corespunzatoare fiecărei faze (vezi Pop, xxxx):

$$(\rho c_p)_{fluid} \left(\phi \frac{\partial \langle T \rangle_f}{\partial t} + \langle \vec{v} \rangle \nabla \langle T \rangle_f \right) = \nabla \left(k_{fluid}\, \phi \nabla \langle T \rangle_f \right) + h \left(T_{solid} - T_{fluid} \right) \tag{2.91}$$

$$(\rho c_p)_{solid} (1-\phi) \frac{\partial \langle T \rangle_s}{\partial t} = \nabla \left(k_{solid} (1-\phi) \nabla \langle T \rangle_s \right) + h \left(T_{fluid} - T_{solid} \right) \tag{2.92}$$

unde se aproximează

$$\frac{k_{solid}}{V}\int_{A_{fs}} \vec{n}_{sf}\,\nabla T_{solid}\,dA \approx h\left(T_{fluid} - T_{solid}\right),\ \frac{k_{fluid}}{V}\int_{A_{fs}} \vec{n}_{fs}\,\nabla T_{fluid}\,dA \approx h\left(T_{solid} - T_{fluid}\right)$$

iar h este un coeficient al trensferului de caldură ce are loc între cele două faze şi care este în general greu de estimat.