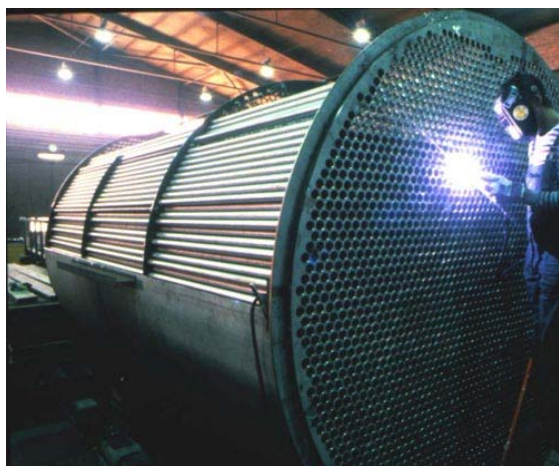


I. MEDII POROASE. PROPRIETĂȚI

1. Introducere

Mediile poroase pot fi întâlnite aproape peste tot în mediul înconjurător, puține materiale cu excepția fluidelor, pot fi considerate ca fiind neporoase. Exemple de medii poroase pot fi: țesuturi biologice (oase, piele, blană, păr), materiale de construcții (lemn, nisip, ciment, cărămizi, beton), materiale artificiale (ceramica, spuma metalică, vata minerală), etc. (vezi Fig. 1). Marea diversitate a mediilor poroase a condus la studiul unor aplicații din domenii variate (Kaviany, 1995), precum:

- chimie - proiectarea reactoarelor (catalitice sau inerte), filtrare, celule de combustie, uscare și deshidratare, transfer de masă, etc.
- mediu - hidrologia apelor subterane, depozitarea deșeurilor menajere, dispersia poluanților, irigații, decontaminare, etc.
- inginerie - schimbătoare de căldură, izolare, combustie, energie solară, energie geotermală, catalizatori auto, modelarea zăcămintelor petroliere, etc.
- biomedicină - materiale dentare și protetice, aparatură medicală, industria medicamentelor, etc.

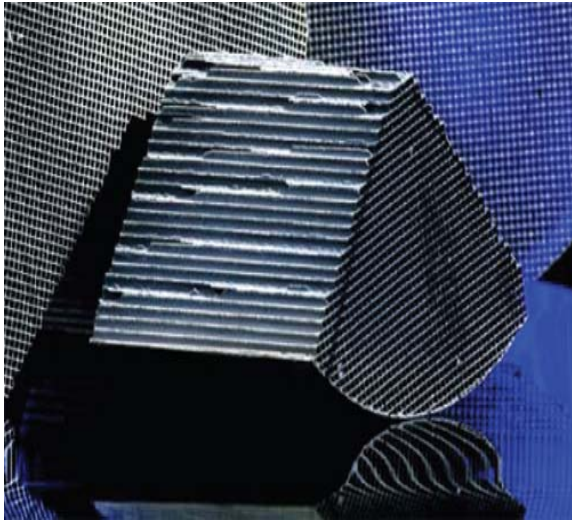


Schimbator de caldura

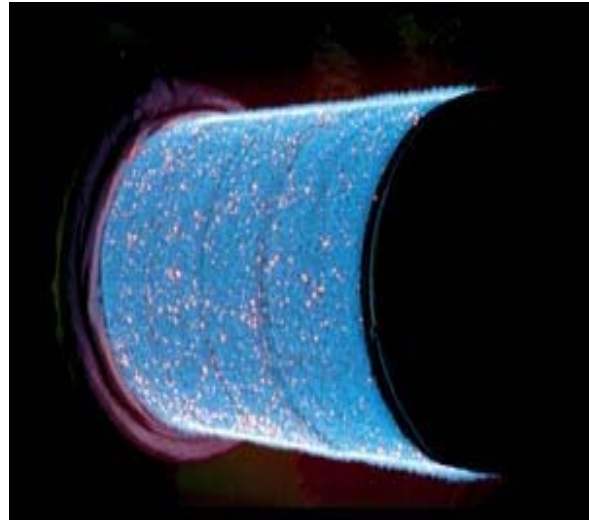


Filtru grasime (hota)

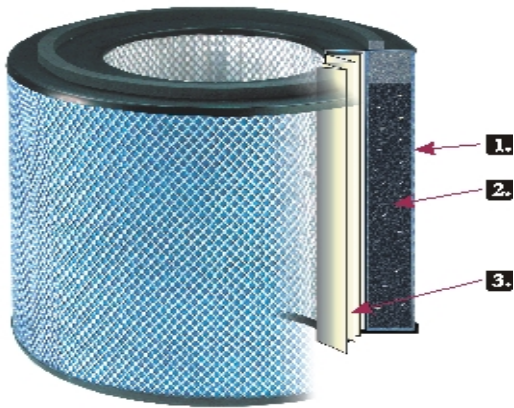
I. MEDII POROASE. PROPRIETĂȚI



Catalizator auto



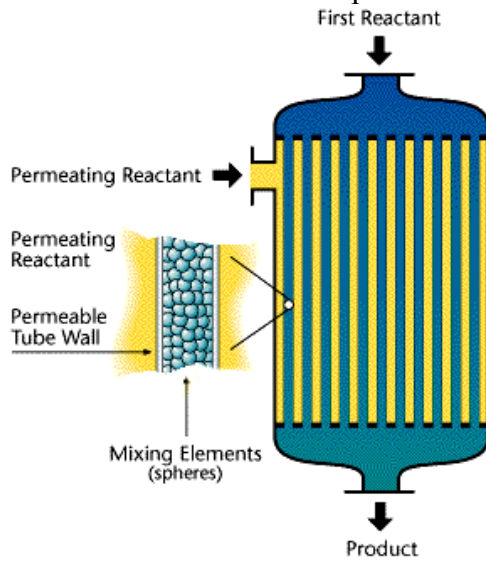
Arzator poros (noxe reduse)



Filtru Hepa



Cooler procesor



Reactor poros

2. Proprietăți

În mod intuitiv vom înțelege prin mediu poros un sistem foarte complicat de capilare având o geometrie absolut arbitrară, care permit mișcarea unuia sau a mai multor fluide prin ele. Se observă că avem două componente: o componentă solidă și o componentă fluidă. Prima problemă care apare în legătură cu mediile poroase este aceea a descrierii mișcării prin acest sistem foarte complicat de capilare, problemă care practic este imposibil de rezolvat și care nu ne asigură o descriere globală a fenomenului. De aceea se dorește o înlocuire a comportării locale sau microscopice a fluidului cu o comportare globală sau macroscopică (fenomene ce au loc la nivelul unui domeniu mult mai mare în comparație cu dimensiunile porilor).

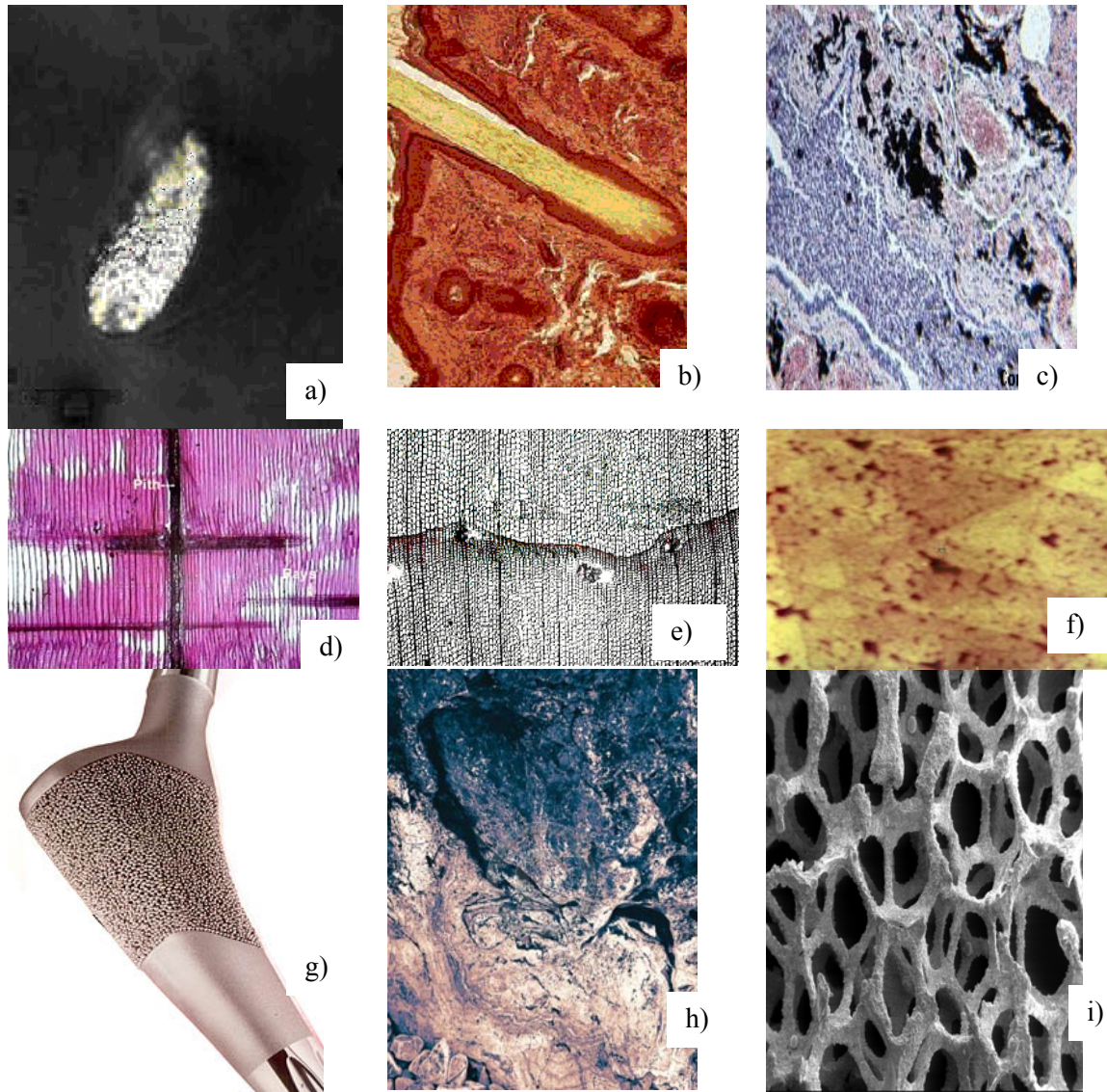


Fig. 1. Exemple de medii poroase: a) secțiune transversală prin firul de păr; b)secțiune longitudinală prin rădăcina firului de păr; c) plămân uman; d) secțiune radială în lemn; e) secțiune transversală în lemn; f) aur poros folosit în medicină; g) material folosite în construcția protezelor; h) rocă poroasă; i) spumă metalică (burete metalic).

Porozitatea

Vom defini în continuare noțiunea de porozitate. Cea mai răspândită definiție a porozității este aceea de raport între volumul total al porilor V_p și volumul total ocupat de mediul poros V , adică $\varphi = V_p/V$. Se poate observa că $0 \leq \varphi \leq 1$, cazurile extreme corespunzând mediului solid $V_p = 0$, respectiv, fluidului liber $V_p = V$.

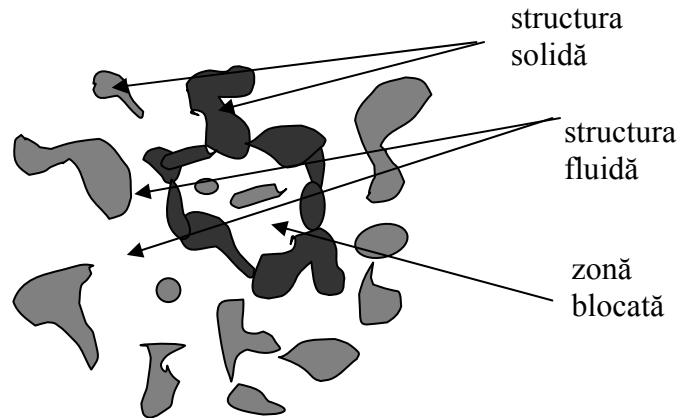


Fig.2. Reprezentare schematică a mediului poros.

În practică, putem întâlni situații în care unele părți ale mediului poros sunt blocate, fluidul nu circulă prin aceste capilare și atunci trebuie să introducem noțiunea de porozitatea efectivă φ_{eff} definită ca raportul dintre volumul efectiv al porilor V_{eff} prin care se poate mișca fluidul și volumul total al mediului V , adică $\varphi_{eff} = V_{eff}/V$. Noțiunile de porozitate și porozitate efectivă definite mai sus sunt porozități volumice. Putem introduce și noțiunea de porozitate superficială φ ca fiind raportul dintre aria golurilor S_g și aria totală a unei suprafețe S , adică $\varphi = S_g/S$. În medie cele două definiții coincid de aceea vom nota în continuare porozitatea unui mediu cu φ . Pentru majoritatea mediilor poroase naturale, φ nu depășește în mod normal valoarea 0,6. În schimb, pentru straturi sferice cu diametru constant, φ poate varia între 0,2545 (această valoare corespunzând unei geometrii-romboidale a particulelor solide) și valoarea 0,4764 (pentru geometrii cubice a particulelor solide). Dacă mărimea granulațiilor mediului poros este neuniformă, tendința este către porozități mai mici decât atunci când mărimea lor este uniformă, din cauză că granulele mai mici umplu porii formați de către granulele mai mari. Valori ale porozității unor materiale obișnuite sunt date în Tabelul 1.



Legea lui Darcy

Henry Philibert Gaspard Darcy (1803 - 1858), inginer francez, a proiectat și construit sistemul de alimentare cu apă al orașului său natal, Dijon. În lucrarea intitulată *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, publicată în 1856, prezintă o parte din experimentele sale. Astfel, el a considerat curgerea apei printr-un mediu poros nedeformabil (tub vertical umplut cu nisip de diferite granulații) și a arătat că debitul Q este proporțional cu secțiunea transversală A a tubului și cu diferența de sarcină piezometrică $h_2 - h_1$ și invers proporțională cu lungimea L a tubului (vezi, Fig.3.).

Vom descrie mai jos un experiment similar cu cel al lui Darcy, tubul umplut cu material poros fiind inclinat(vezi, Gheorghiu 1966):

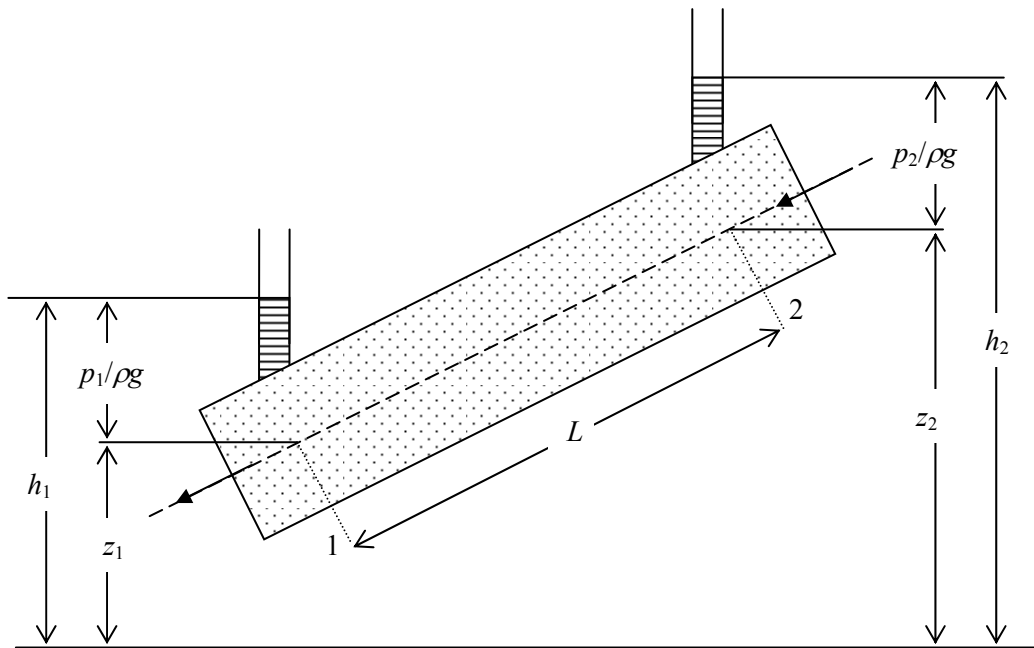


Fig.3. Experimentul lui Darcy.

Legea lui Darcy pentru un mediu poros omogen, izotrop, saturat de un fluid incompresibil se exprimă astfel:

$$Q = k \frac{A}{L} \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 \right) = k \frac{A}{L} (h_2 - h_1) \quad (1.1)$$

unde ρ este densitatea fluidului, g este mărimea accelerației gravitaționale, p_i este presiunea măsurată în punctul i , iar $h_i = p_i / \rho g + z_i = p_i / \gamma + z_i$ unde $\gamma = \rho g$ este greutatea specifică a fluidului reprezintă sarcina sau înălțimea piezometrică. Coeficientul de proporționalitate k se numește *coeficient de filtrație*. Din punct de vedere microscopic în interiorul mediului poros are loc o curgere foarte complicată care depinde de geometria mediului (vezi, Fig.4.). De aceea se introduce o viteză medie, viteza de curgere prin secțiunea de arie A a tubului umplut cu mediu poros. În cazul unidimensional această viteză se obține din relația (1.1):

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{A} = k \frac{h_2 - h_1}{L} \quad (1.2)$$

Viteza $\langle v \rangle$ este cunoscută sub numele de *viteză de filtrație*, *viteză superficială* sau *viteză darciană*.

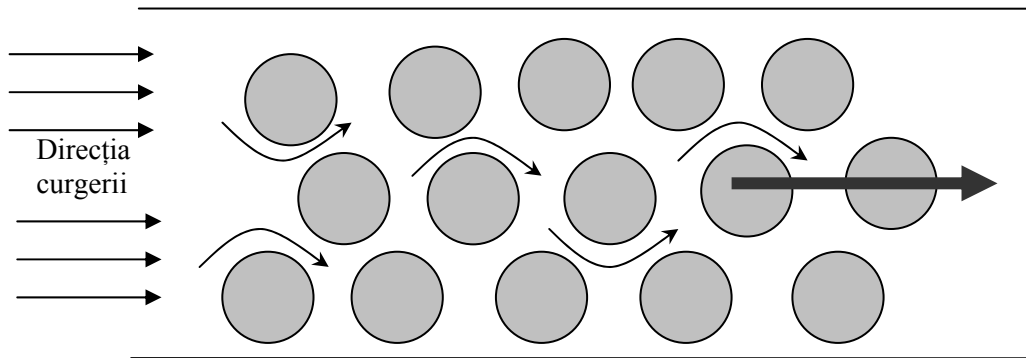


Fig.4. Curgerea microscopică și curgerea macroscopică.

Dacă considerăm două puncte arbitrare apropiate în interiorul tubului umplut cu mediu poros saturat cu fluid (distanța dintre ele este $\Delta s \rightarrow 0$) și ținând cont că înălțimea piezometrică scade putem scrie ecuația diferențială a curgerii:

$$\langle v \rangle = -k \frac{dh}{ds} \quad (1.3)$$

Pentru extinderea metodei de mediere a vitezei într-un spațiu tridimensional vom alege în mediul poros saturat de fluid un volum de control V , numit și volum elementar reprezentativ (vezi, Fig.5.). Acest volum de control trebuie să aibă lungimea caracteristică mult mai mică decât dimensiunea caracteristică a curgerii (de exemplu, lățimea canalului) și mult mai mare decât lungimea caracteristică microscopică a mediului (diametrul mediu al porilor), vezi Nakayama (1995). În acest caz viteza de filtrație se definește astfel:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} \vec{v} dV \quad (1.4)$$

unde V_f este partea volumului de control ocupată de fluid. O altă posibilitate de mediere, numită *mediere intrinsecă*, poate fi folosită:

$$\langle \vec{v} \rangle_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \vec{v} dV \quad (1.5)$$

Viteza $\langle \vec{v} \rangle_f$ se numește *viteză intrinsecă (medie)*. Ținând cont de definiția porozității obținem o legătură între cele două viteze (darciană și intrinsecă) cunoscută sub numele de *relația Dupuit-Forchheimer*:

$$\langle \vec{v} \rangle_f = \langle \vec{v} \rangle / \varphi \quad (1.6)$$

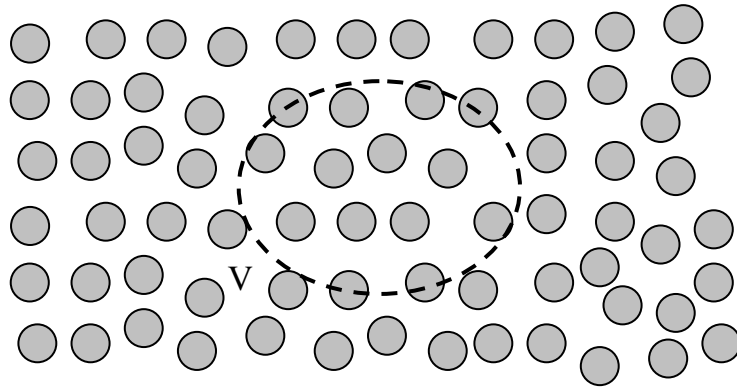


Fig.5. Structura microscopică a mediului poros și volumul de control.

În formă vectorială, legea lui Darcy se poate scrie astfel:

$$\langle \vec{v} \rangle = -k \text{ grad } h \quad (1.7)$$

Dacă ținem seama de definiția înălțimii piezometrice putem scrie ecuația (1.7) în forma:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{K}{\mu} \text{ grad } (p + \rho g z) \text{ sau } \langle \vec{v} \rangle = -\frac{K}{\mu} \text{ grad } p + \rho \vec{g} \quad (1.8)$$

unde mărimea nou introdusă $K = k\mu/\rho g$, care are dimensiunea unei suprafețe, $\langle L^2 \rangle_{SI}$, se numește permeabilitate în care μ reprezintă vâscozitatea dinamică a fluidului. În cazul unui mediu izotrop, permeabilitatea este un scalar care variază între limite foarte largi. De exemplu, pentru diferite tipuri de soluri, valorile sunt: pietriș curat $10^{-7} - 10^{-9}$, nisip curat $10^{-9} - 10^{-12}$, pământ $10^{-11} - 10^{-13}$, argilă stratificată $10^{-13} - 10^{-16}$ și lut $10^{-16} - 10^{-20}$. Cei care lucrează în domeniul geofizicii folosesc deseori ca unitate de măsură pentru permeabilitate *darcy-ul* egal cu $0,987 \times 10^{-12} \text{ m}^2$. Valori ale permeabilității unor materiale obișnuite sunt date în Tabelul 1.

Tipul materialului	Porozitatea	Permeabilitatea
Cărămidă	0.12 - 0.34	4.8×10^{-11} - 2.2×10^{-9}
Praf de cupru	0.09 - 0.34	3.3×10^{-6} - 1.5×10^{-5}
Piele	0.56 - 0.59	9.5×10^{-10} - 1.2×10^{-9}
Piatră de var (dolomit)	0.04 - 0.10	2×10^{-11} - 4.5×10^{-10}
Nisip	0.37 - 0.50	2×10^{-7} - 1.8×10^{-6}
Siliciu pudră	0.37 - 0.49	1.3×10^{-13} - 5.1×10^{-10}
Sol	0.43 - 0.54	1.4×10^{-9} - 1.4×10^{-7}
Sârmă comprimată	0.68 - 0.76	3.8×10^{-5} - 1×10^{-4}

Tabelul 1. Proprietăți ale câtorva materialelor poroase obișnuite
(în baza datelor preluate din Scheidegger (1974) și Bejan și Lage (1991))

Trebuie menționat că în general mediile poroase sunt neomogene și anizotrope, adică permeabilitatea este, un tensor de ordinul al doilea (9 componente) care depinde de punct, iar ecuația lui Darcy în absența câmpului gravitațional se scrie:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \text{grad } p \quad (1.9)$$

unde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}.$$

Ene și Polisevski (1987) au arătat că tensorul \mathbf{K} este simetric și pozitiv definit ($K_{12} = K_{21}$, etc.).

Ecuația (1.9) se poate scrie în coordonate carteziane, astfel:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\mu} \left(K_{11} \frac{\partial p}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial p}{\partial y} + K_{13} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ v &= \frac{1}{\mu} \left(K_{21} \frac{\partial p}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial p}{\partial y} + K_{23} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ w &= \frac{1}{\mu} \left(K_{31} \frac{\partial p}{\partial x} + K_{32} \frac{\partial p}{\partial y} + K_{33} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

unde (u, v, w) sunt componentele vitezei darciene în lungul axelor (x, y, z) . Pentru un mediu poros ortotrop (cu trei direcții principale de inerție) tensorul permeabilitate este o matrice diagonală de componente $K_{ii} = K_i$, iar ecuația (1.9) devine:

$$u = \frac{K_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, v = \frac{K_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, w = \frac{K_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.11)$$

În general, tensorul permeabilitate se determină experimental. Există și cazuri în care, pentru unele structuri poroase simple, permeabilitatea se poate calcula teoretic, utilizând teoria hidrodinamicii. Curgerea în mediul poros poate fi privită ca o curgere a fluidului prin orificii (capilare) sau o curgere în jurul unor obstacole.

Ecuția Kozeny-Carman

Kozeny (1927) considerând un mediu poros format dintr-o structură de tuburi paralele de lungimi egale și cu secțiuni transversale de diferite forme geometrice, a obținut o relație între permeabilitatea și porozitatea mediului poros. Vom considera în continuare un model simplificat în care mediul poros este format din tuburi paralele având diametrul mediu δ (vezi Fig. 6), curgerea fiind total dezvoltată, deci unidirecțională. În cazul unui singur tub curgerea este de tip Hagen-Poiseulle (vezi Anexa...) iar debitul (fluxul de masă) Q_δ este dat de relația:

$$Q_\delta = -\frac{\pi \delta^4}{128 \mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.12)$$

Viteza medie v_δ de curgere prin tubul de diametru δ se obține prin împărțirea debitului (1.12) la aria tubului:

$$v_\delta = \frac{Q_\delta}{\pi \delta^2 / 4} = -\frac{\delta^2}{32} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.13)$$

Dacă structura de tuburi paralele este formată din n tuburi pe unitatea de arie (aria transversală a mediului ce conține cele n tuburi) atunci conform definiției, porozitatea va fi $\varphi = n\pi\delta^2/4$. Ținând cont de faptul că viteza v_δ reprezintă, de fapt, pentru ansamblul de tuburi viteza intrinsecă mediată $\langle v \rangle_f$, putem găsi viteza darciană (de filtrație) $\langle v \rangle$ folosind relația Dupuit-Forchheimer (1.6):

$$\langle v \rangle = -\frac{n\pi\delta^2}{4} \frac{\delta^2}{32} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.14)$$

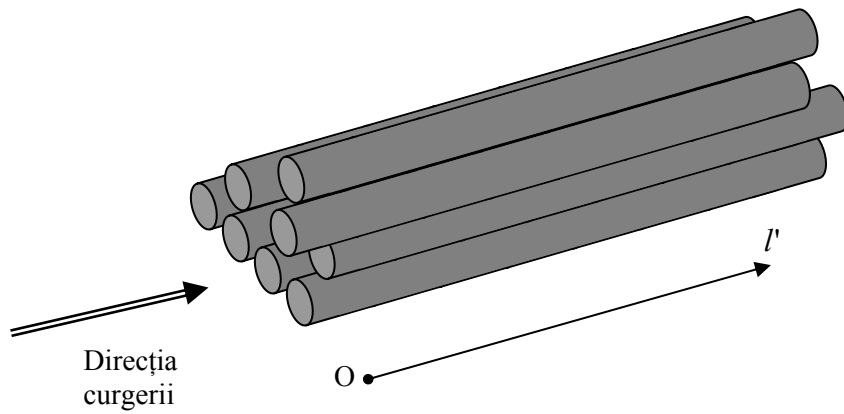


Fig.6. Curgere prin tuburi paralele.

După legea lui Darcy, dată de ecuația (1.9) și relația (1.14) se obține expresia permeabilității K sub forma:

$$K = \frac{n\pi\delta^4}{128} = \frac{\varphi\delta^2}{32} \quad (1.15)$$

Generalizând modelul de mai sus, Carman (1937) a considerat că lungimea l' a tuburilor poate să fie mai mare decât grosimea mediului l (vezi Fig.7.), și atunci relația dintre viteza intrinsecă și cea darciană se modifică astfel: $\langle v \rangle_f = \langle v \rangle l' / \varphi l$, mărimea l'/l purtând numele de *turtozitate* (în engleză *tortuos* = *îndoit*, *răsucit*, *sinuos*). Într-adevăr, mărirea lungimii tuburilor duce la modificarea porozității și pentru o unitate de mediu poros este dată de relația:

$$\varphi' = \frac{\text{volumul porilor}}{\text{volumul mediului}} = \frac{n \frac{\pi\delta^2 l'}{4}}{1} = n \frac{\pi\delta^2 l'}{4 l} = \varphi \frac{l'}{l}$$

unde φ este porozitatea pentru cazul tuburilor de lungime l . Facem observația că φ reprezintă de fapt porozitatea superficială.

Ținând cont de cele de mai sus, legea lui Darcy, dată de (1.14), se modifică astfel:

$$\langle v \rangle = - \frac{\varphi\delta^2}{32} \frac{l'}{l} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.16)$$

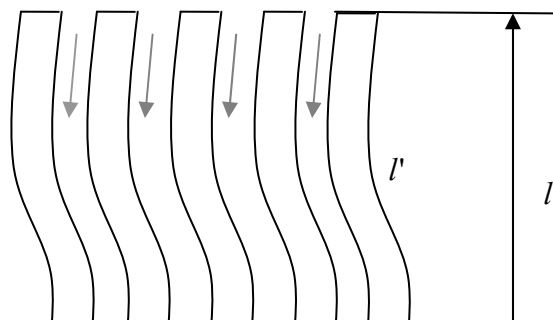


Fig. 7. Reprezentare schematică a modelului generalizat al lui Carman.

Notăm cu S_s aria transversală a părții solide a mediului poros, cu S_f aria transversală a tuburilor, iar cu $S = S_s + S_f$ aria transversală a mediului poros considerat. Conform definiției, porozitatea

este dată de $\varphi = \frac{S_f}{S} = \frac{S_f}{S_s + S_f}$ și înmulțind atât numărătorul cât și numitorul cu l obținem:

$$\varphi = \frac{V_f}{V_s + V_f} \text{ sau } V_f = \frac{\varphi V_s}{1 - \varphi} \quad (1.17)$$

unde V_s reprezintă volumul părții solide a mediului poros, iar V_f volumul porilor. Împărțim (1.17) cu A , aria interioară a tuburilor, adică aria suprafeței „udate” de fluid și avem:

$$\frac{V_f}{A} = \frac{\varphi V_s}{A(1 - \varphi)} \quad (1.18)$$

Deoarece volumul V_f este de fapt volumul tuburilor de lungime l' , $V_f = n \frac{\pi \delta^2 l'}{4}$, iar aria suprafeței interioare este aria laterală a tuburilor, $A = n \pi \delta l'$, din relația (1.18) se obține:

$$\delta = \frac{4 \varphi V_s}{A(1 - \varphi)} \quad (1.19)$$

Vom considera, în continuare, că partea solidă a mediului este formată dintr-un număr oarecare N de particule sferice de diametru mediu d_m și atunci $V_s = N \cdot \pi d_m^3 / 6$, iar aria interioară, A , a porilor trebuie să fie egală cu aria suprafeței solide, $A = N \pi d_m^2$. Înlocuind expresia lui A în (1.19) avem:

$$\delta = \frac{2 \varphi d_m}{3(1 - \varphi)} \quad (1.20)$$

iar ecuația (1.16) devine:

$$\langle v \rangle = - \frac{d_m^2 \varphi^3}{72(1 - \varphi)^2} \frac{l}{l'} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.21)$$

Experimental s-a dovedit că în cazul mediului poros format din sfere raportul l'/l este aproximativ 2,5 și relația (1.21) ia forma:

$$\langle v \rangle = -\frac{d_m^2 \varphi^3}{180(1-\varphi)^2} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.22)$$

Comparând ecuația (1.22) cu legea lui Darcy dată de (1.9) permeabilitatea K se exprimă astfel:

$$K = \frac{d_m^2 \varphi^3}{180(1-\varphi)^2} \quad (1.23)$$

Deși obținută teoretic pentru un mediu poros cu o structură foarte particulară, ecuația (1.23), cunoscută sub numele de *ecuația Kozeny-Carman*, dă rezultate bune și pentru medii poroase cu o structură mai complicată. Alte relații între permeabilitate și porozitate pot fi găsite în cartea lui Bear (1972).

Extensii ale legii lui Darcy

După cum am văzut mai sus, legea lui Darcy reprezintă o dependență liniară între gradientul presiunii și viteza de filtrație. S-a observat, însă, ca în practică legea liniară nu mai este validă pentru valori mari ale vitezei de filtrație. În baza experimentelor lui Hazen (1895) (vezi, Fig. 8.) Forchheimer (1901) propune următoarele legi:

$$\nabla p = a\langle v \rangle + b\langle v \rangle^2, \quad \nabla p = b\langle v \rangle^m, \quad \nabla p = a\langle v \rangle + b\langle v \rangle^2 + c\langle v \rangle^3 \quad (1.24)$$

unde coeficienții a , b , c și exponentul m trebuie determinați experimental.

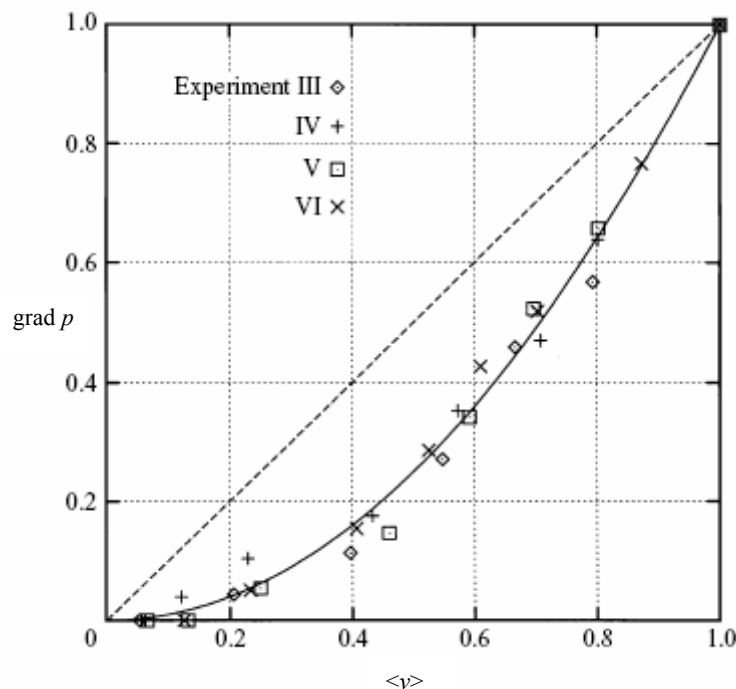


Fig.8. Deviația legii lui Darcy de la forma liniară

Mult mai târziu, Joseph și alții (1982), au arătat că cea mai potrivită modificare a legii lui Darcy este:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} \langle \vec{v} \rangle - \frac{c_F}{\sqrt{K}} \rho \langle \vec{v} \rangle \langle \vec{v} \rangle \quad (1.25)$$

unde c_F este o mărime adimensională care depinde de structura mediului poros, iar ρ reprezintă densitatea fluidului.

O altă alternativă a legii lui Darcy este extensia dată de Brinkman (1947a, b) care a modificat legea de curgere a lui Stokes peste o sferă considerând și efectul sferelor învecinate. Astfel, el a combinat curgerea de tip Darcy cu curgerea de tip Stokes obținând ecuația:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} \langle \vec{v} \rangle + \tilde{\mu} \Delta \langle \vec{v} \rangle \quad (1.26)$$

unde $\tilde{\mu}$ este o vâscozitate efectivă.

Atât extensia lui Forchheimer (1.25) cât și extensia lui Brinkman (1.26), dar și o combinație a acestora cunoscută sub numele de ecuația Brinkman-Forchheimer

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K} \langle \vec{v} \rangle - \frac{c_F}{\sqrt{K}} \rho \langle \vec{v} \rangle \langle \vec{v} \rangle + \tilde{\mu} \Delta \langle \vec{v} \rangle \quad (1.27)$$

sunt folosite pentru mediile cu porozități ridicate. De-a lungul timpului au existat mai multe dezbateri în legătură cu validitatea acestor legi, dar și dezbateri legate de expresiile mărimilor c_F și $\tilde{\mu}$. O descriere amănunțită a extensiilor legii lui Darcy poate fi găsită în Nield și Bejan (2006), Ingham și Pop (1998, 2002, 2005,) și în Ingham și alții (2004).

3. Natura curgerii convective și a transferului de căldură

Transferul de căldură convectiv se referă la transferul de căldură apărut datorită efectului combinat al conducției și a mișcării generale a fluidului atunci când un fluid și o frontieră au temperaturi diferite. Această diferență de temperatură duce la apariția unui gradient de presiune (o variație a presiunii) datorat variației densității cu temperatura care în prezența câmpului gravitațional dă naștere la o *forță de susținere (buoyancy)* ce pune fluidul în mișcare (fluidul cald cu o densitate mai mică urcă și cel rece cu o densitate mai mare coboară). Această forță produce, în plus față de transferul de căldură datorat difuziei, un transfer de căldură datorat

modificării volumului, mișcarea macroscopică a fluidului, care modifică distribuția originală a temperaturii. Cu toate că mișcarea fluidului este mecanismul dominant în transferul de căldură, ceea ce conduce la apariția forțelor care produc mișcarea fluidului, este gradientul de temperatură. Astfel, instabilitățile hidrodinamice și termice sunt dependente, de aici rezultând și ecuațiile cuplate care descriu fenomenul de mișcare și transfer de căldură. Dacă o mișcare este în întregime datorată forțelor de sustentație atunci mișcarea se numește *convecție naturală* sau *liberă*, în contrast cu *convecția mixtă* unde mișcarea implică și o forță externă. Dacă forța externă este predominantă forța de sustentație atunci avem ne aflăm în cazul *convecției forțate*.

Fenomenul convecției libere în medii poroase poate avea atât consecințe benefice, dar și catastrofale. De exemplu, în crusta solidă a Pământului convecția liberă se produce datorită difuziei constante de căldură de la straturile de magmă topită ducând la apariția apei termale sau a mișcărilor convective din zăcămintele de țiței și gaze sunt folositoare omului, dar în urma convecției libere pot apărea și efecte nedorite. În timpul activității vulcanice intense însă, scoarța pământului se încălzește la suprafață ceea ce duce la topirea zăpezii și la formarea unor torente care antrenează nisip, praf, pământ transformându-se în cele din urmă în valuri nimicitoare de nămol. Aceste valuri de noroi pot fi mai periculoase decât efectele directe ale vulcanilor, ducând la pierderea a mii de vieți omenești. Printr-un proces similar, efectele convecției libere pot avea un rol hotărâtor și în producerea avalanșelor.

Variația densității cu temperatura are efecte importante doar în termenul forțelor masice în care se utilizează pentru densitate o funcție de temperatură, în ceilalți termeni ea fiind considerată constantă (vezi, Currie 2003). Aproximația lui Boussinesq consideră că densitatea este o funcție liniară de temperatură:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_e)] \quad (1.28)$$

ρ_0 fiind densitatea fluidului la o temperatură de referință T_e , iar β este coeficientul de expansiune termică. Această lege este, în general, atribuită lui Boussinesq (1903), deși din punct de vedere istoric Oberbeck (1879) are întâietate.

Folosind aproximația (1.28) ecuația (1.8) devine:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{K}{\mu} \text{grad } p + \rho \vec{g} \beta (\langle T \rangle - \langle T_e \rangle) \quad (1.29)$$

Se observă că în acest caz ecuația (1.29) este cuplată cu ecuația energiei (se va obține în capitolul următor):

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + (\rho c_p)_{fluid} \langle \vec{v} \rangle \nabla \langle T \rangle = \nabla (k_e \nabla \langle T \rangle) \quad (1.30)$$

3. Condiții la frontieră

Considerăm un domeniu poros având ca frontieră planul Oxz (vezi Fig. 9) și presupunem regiunea $y < 0$ ocupată de un mediu poros saturat de un fluid incompresibil. Dacă frontiera Oxz este impermeabilă atunci componenta normală a vitezei de filtrație $\langle \vec{v} \rangle = (u, v, w)$ trebuie să fie nulă la frontieră (vezi Nield și Bejan, 2006):

$$v|_{y=0} = 0 \quad (1.31)$$

iar celelalte componente ale vitezei de filtrație pot avea valori arbitrare, în timp ce pentru ecuația energiei putem avea la frontieră o temperatură prescrisă, un flux de căldură prescris sau o condiție mixtă de forma:

$$\langle T \rangle|_{y=0} = T_w \text{ sau } k_e \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \Big|_{y=0} = q_w \text{ sau } k_e \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \Big|_{y=0} = f(\langle T \rangle) \quad (1.32)$$

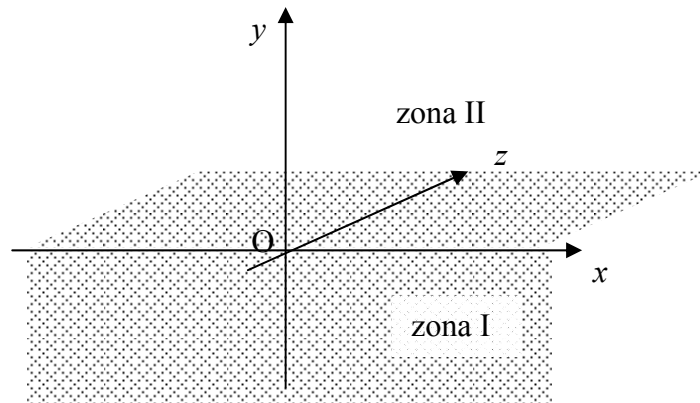


Fig.9. Condiții la frontieră și interfață

Dacă frontiera Oxz este o frontieră liberă, adică zona II este ocupată de un fluid diferit de cel din zona I atunci condiția care se impune este:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (1.33)$$

În cazul în care atât zona I cât și zona II sunt ocupate de același fluid la interfață se impune condiția lui Beavers and Joseph (1967):

$$\frac{\partial u_f}{\partial y} = \frac{\alpha^*}{\sqrt{K}} (u_f - u_m) \quad (1.34)$$

I. MEDII POROASE. PROPRIETĂȚI

unde mărimea α^* depinde de structura mediului poros, iar indicii f și m indică fluidul și mediul poros. Pentru ultimele două cazuri condițiile pentru ecuația energiei sunt cele de continuitate a temperaturii și a fluxului de căldură la interfață:

$$T_f = \langle T_m \rangle, \quad k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} = k_m \frac{\partial \langle T_m \rangle}{\partial y} \quad (1.35)$$

Trebuie să menționăm faptul că au existat și există încă multe dezbateri legate de prescrierea corectă a condițiilor la interfață. O revizuire și o analiză a acestor condiții poate fi găsită în lucrările lui Alazmi și Vafai (2001) și Merrikh și Mohamad (2002).