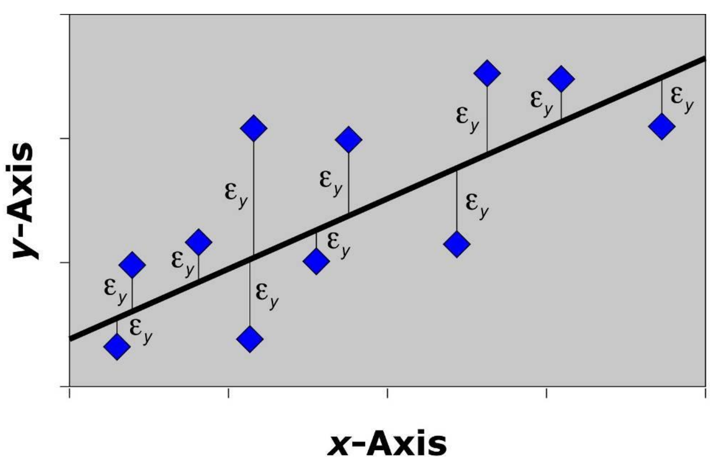
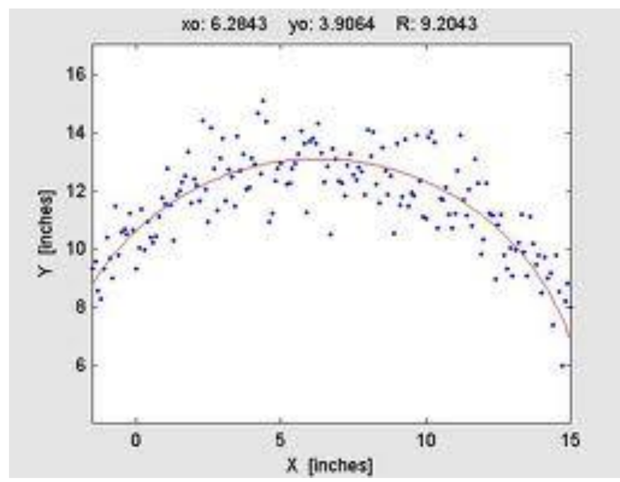
Laborator 8. Metoda celor mai mici patrate

În practică măsura experimentală obţinută *y* este măsurată cu o anumită eroare, punctul (*x*, *y*) nu este calculat cu exactitate. Mulţimea de date este o mulţime finită de perechi (x_i, y_i) numită "nor de puncte".

Se pune problema de a minimiza diferenţa între punctele experimentale şi cele calculate şi de a determina o curbă care să aproximeze cât mai bine traseul urmat de norul de puncte, sau, altfel spus, "tendinţa" norului de puncte este echivalentă cu deteminarea curbei care se găseşte la distanţa cea mai mică de fiecare punct al "norului".





Fie $f \in L_w^2[a,b]$ şi $\Phi \leq L_w^2[a,b]$ de dimensiune $n+1$. Dorim să găsim o aproximantă $\varphi^* \in \Phi$ astfel încât $\|\varphi^* - f\|^2 \leq \|\varphi - f\|^2, \forall \varphi \in \Phi$.

Scriem

$$\varphi^*(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \qquad (1)$$

unde $\{\varphi_k | k = 0, \ldots, n\}$ este o bază a lui Φ.

Coeficienţii sunt soluţiile ecuaţiilor normale

$$a_0(\varphi_0, \varphi_k) + a_1(\varphi_1, \varphi_k) + \cdots + a_n(\varphi_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 0, \ldots, n. \qquad (2)$$

Aproximanta poate fi continuă sau discretă, în funcţie de măsura aleasă în definiţia produsului scalar. În cazul continuu produsul scalar are forma

$$(g,h) = \int_a^b w(x)g(x)h(x)dx,$$

iar in cazul discret

$$(g,h) = \sum_{k=0}^{N} w_k g(x_k)h(x_k).$$

Exemplu: For example, suppose that we fit a second-order polynomial or quadratic:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

For this case the sum of the squares of the residuals is

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)^2$$

Minimizam

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum x_i^2 \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)$$

These equations can be set equal to zero and rearranged to develop the following set of normal equations:

$$(n)a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \left(\sum x_i^2\right) a_2 = \sum y_i$$
$$\left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \left(\sum x_i^3\right) a_2 = \sum x_i y_i$$
$$\left(\sum x_i^2\right) a_0 + \left(\sum x_i^3\right) a_1 + \left(\sum x_i^4\right) a_2 = \sum x_i^2 y_i$$

Tema de laborator

1. Implementati metoda celor mai mici patrate pentru cazul discret.
2. Utilizati polyfit pentru a obtine curba ce aproximeaza cel mai bine datele.