# Metode numerice pentru probleme Cauchy

## 1. Ecuaţii diferenţiale. Probleme Cauchy

Exemple *Pendulul matematic*(Figura 1):

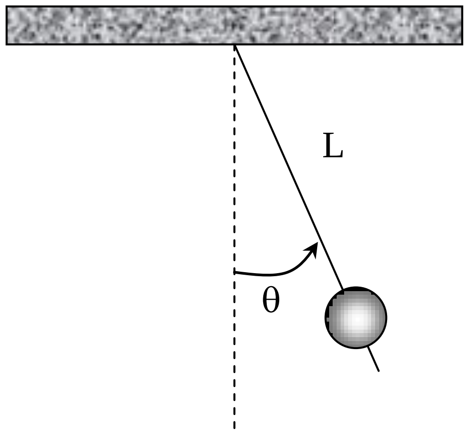


Figura 1. Pendulul matematic

Modelul matematic dat de ecuaţia: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$

Condiţii iniţiale: $\theta(t_0) = \theta_0, \ \frac{d\theta}{dt}(t_0) = \theta'_0$

*Descompunerea elementelor radioactive:*

Modelul matematic dat de ecuaţia: $\frac{dm}{dt} = -\lambda m$, unde $m$ reprezintă masa materialului radioactiv, iar $\lambda$ este o constantă.

## *1.1. Noţiuni teoretice introductive*

*Definiţie* 1: Spunem că o funcţie satisface o condiţie **Lipschitz** în variabila $y$ pe o mulţime $D \subset \mathbf{R}^2$ dacă există o constantă $L > 0$, numită constanta Lipschitz a funcţiei $f$, astfel încât

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

pentru orice $(t, y_i) \in D$, $i = 1, 2$.

*Definiţie* 2: O mulţime $D \subset \mathbf{R}^2$ se numeşte **convexă** dacă pentru orice două puncte $(t_1, y_1)$ şi $(t_2, y_2)$ din $D$ şi $\lambda \in [0,1]$ punctul $\left((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2\right) \in D$.

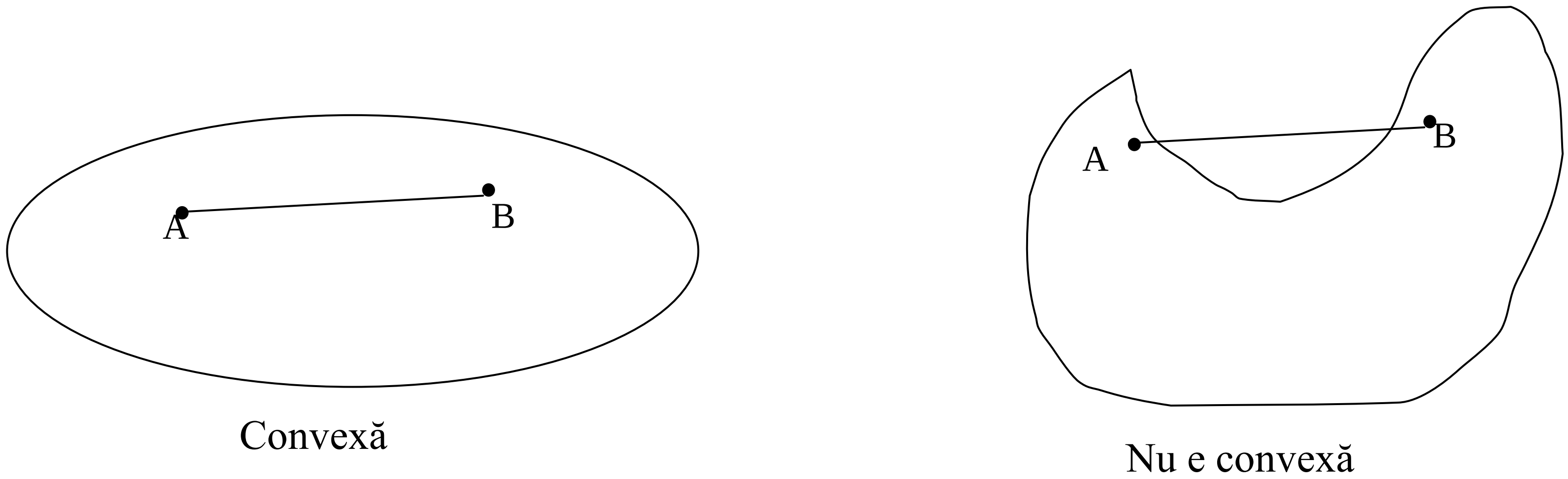


Figura 2. Interpretarea geometrică a noţiunii de convexitate.

*Teoremă* 1: Fie $f(t,y)$ definită pe o mulţime convexă $D \subset \mathbf{R}^2$. Dacă există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \le L \tag{1.1}$$

pentru orice $(t,y) \in D$ atunci $f$ satisface o condiţie **Lipschitz** pe mulţimea $D$ în variabila $y$ iar constantă Lipschitz este $L$.

*Teoremă* 2: Fie $f(t,y)$ continuă pe mulţimea $D = \{(t,y) \mid a \le t \le b, -\infty \le y \le \infty\}$. Dacă $f$ satisface o condiţie **Lipschitz** pe mulţimea $D$ în variabila $y$, atunci problema iniţială (Cauchy)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

are soluţie unică în intervalul $[a,b]$.

*Definiţie* 3: Se spune că problema iniţială (Cauchy)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{1.2}$$

este **corect pusă (definită)** *(well posed)*dacă:

1.Are o soluţie unică, $y(t)$.

2.Pentru orice $\varepsilon > 0$, există o constantă pozitivă $k(\varepsilon)$, astfel încât pentru $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ şi $\delta(t)$ continuă pe $[a,b]$ cu $\delta(t) < \varepsilon$ există o unică soluţie $z(t)$ a problemei iniţiale:

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z) + \delta(t), \quad a \le t \le b \\ z(a) = z_a + \varepsilon_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

şi

$|z(t) - y(t)| \le k(\varepsilon)\varepsilon$ pentru orice $a \le t \le b$.

Problema (1.3) este problema perturbată asociată problemei (1.2). Se observă că la adăugarea unei erori atât funcţiei $f$ cât şi condiţiei iniţiale soluţia perturbată rămâne mărginită. Acest aspect este important deoarece în cazul rezolvărilor numerice sunt inerente erorile de trunchiere. Doar daca o problemă este corect definită ne putem aştepta ca soluţia numerică sa aproximeze cu acurateţe soluţia problemei neperturbate.

*Teoremă* 3: Fie $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty \le y \le \infty\}$. Dacă $f$ este continuă şi satisface o condiţie **Lipschitz** pe mulţimea $D$ în variabila $y$, atunci problema iniţială (Cauchy)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

este corect definită.

Folosind metode numerice nu se obţine o aproximare continuă, se obţin aproximări discrete ale lui $y$ în anumite puncte, numite şi **noduri**, ce formează o **reţea** *(grilă, mesh, grid)*. De exemplu se consideră pentru intervalul $[a,b]$ o partiţie cu pasul constant :

$$a, a+h, a+2h, ..., a+ih, ..., a+(N-1)h, b$$

astfel încât capetele subintervalelor vor fi:

$$t_i = a+ih, \;\; i=1, ..., N$$

unde $N$ este numărul subintervalelor, iar pasul este considerat pentru început echidistant, $h=(b-a)/(N-1)$. Printr-o metodă numerică se vor obţine valorile aproximative discrete $y(t_i) \stackrel{not}{=} y_i,\ i=1,...,N$ (vezi Figura 3).

Numim **metode cu un pas (unipas)** metodele în care pentru a calcula valoarea lui $y_{i+1}$ facem apel la mărimile $y_i$, $t_i$ şi $h$. Dacă pentru calculul lui $y_{i+1}$ avem nevoie de valorile în mai multe noduri anterioare atunci spunem ca avem o **metodă cu mai mulţi paşi (multipas)**.

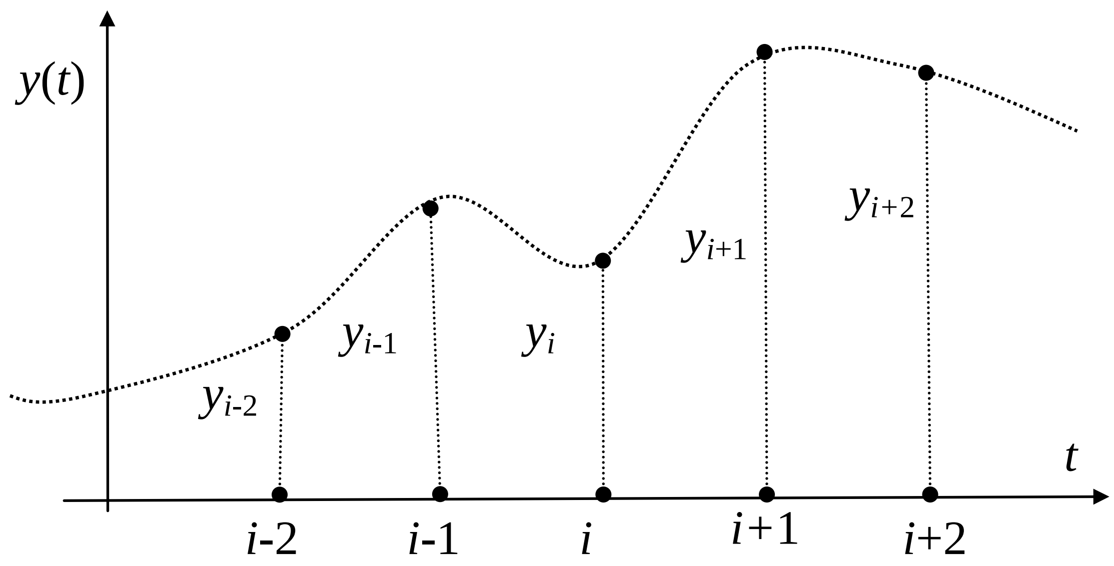


Figura 3. Reprezentarea nodurilor şi a valorilor soluţiei în noduri

## *1.2. Metode unipas*

În general o metodă cu un pas pentru problema de tipul

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), & (t, y) \in [a, b] \times \mathbf{R}^n \\ \quad y(a) = y_a \end{cases} \tag{1.4}$$

şi pentru o reţea de pas $h$ are forma:

$$\begin{aligned} & y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h), \quad [t, y] \in [a, b] \times \mathbf{R}^n, \ \ h > 0 \\ & \phi : [a, b] \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n \end{aligned} \tag{1.5}$$

Considerând că soluţia exactă este dată în punctele grilei de $\tilde{y}(t_i)$ atunci definim eroarea de trunchiere locală astfel:

*Definiţie* 4: Numim **eroare de trunchiere locală** diferenţa dintre creşterea aproximativă şi cea exactă pe unitatea de pas.

$$T(t_i, y_i, h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{\tilde{y}(t_{i+1}) - \tilde{y}(t_i)}{h} = \phi(t_i, y_i, h) - \frac{\tilde{y}(t_{i+1}) - \tilde{y}(t_i)}{h} \tag{1.6}$$

Definiţia 5: O metodă $\phi$ se numeşte **consistentă** dacă $T(t, y, h) \to 0$ când $h \to 0$ în mod uniform pentru $(t, y) \in [a, b] \times \mathbf{R}^n$.

Conform definiţiei de mai sus o pentru ca o metodă să fie consistentă este necesar ca $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$.

*Definiţia* 6: Spunem că ordinul unei metode $\phi$ este $p$ dacă

$$\|T(t, y, h)\| \leq Kh^p \tag{1.7}$$

uniform pe $[a, b] \times \mathbf{R}^n$, unde $\|\ \|$ este o normă vectorială, iar $K$ este constantă. Aceasta se mai poate scrie sub forma:

$$T(t, y, h) = O(h^p), \quad h \to 0 \tag{1.8}$$

Se observă că pentru $p > 1$ metoda este consistentă.

*Definiţia* 7: O funcţie $\tau : [a,b] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care satisface $\tau(t,y) \neq 0$ şi

$$T(t,y,h) = \tau(t,y)h^p + O(h^{p+1}), \quad h \to 0 \tag{1.9}$$

se numeşte **funcţie de eroare principală.**

### *1.2.1. Metoda lui Euler*

Fie problema iniţială

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{1.10}$$

corect definită. Putem obţine metoda lui Euler pe mai multe căi, una dintre ele constând în dezvoltarea în serie Taylor a soluţiei problemei (1.10) (Faires şi Burden, 2002).

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Presupunând că aceasta este de clasă $C^2$ pe intervalul $[a,b]$ avem:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + h\, y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) \tag{1.11}$$

unde $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$. Deoarece $y(t)$ satisface ecuaţia (1.10) avem:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) \tag{1.12}$$

şi dacă renunţăm la rest, obţinem formula lui Euler:

$$\begin{aligned} &y_0 = y_a \\ &y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i), \qquad i = 0,1,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Metoda lui Euler este o metodă explicită cu un singur pas.

O altă metodă de obţinere a metodei lui Euler constă în aproximarea derivatei $y'(t_i)$din ecuaţia (1.10:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i), \quad i = 0,1,\ldots,N-1 \tag{1.14}$$

Se observă ca metoda lui Euler nu face altceva decât să urmeze panta (tangenta) din nodul curent pentru a calcula valoarea din nodul următor.

Exemplu 1: Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 y(t), & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

care are soluţia analitică $y(t) = e^{\frac{t^3}{3}}$ şi se poate obţine de exemplu în Mathematica:

```
In[1]:= DSolve[{y'[x] == x^2 y[x], y[0] == 1}, y[x], x]
```

$$\text{Out[1]=}\quad \{\{y[x] \to e^{\frac{x^3}{3}}\}\}$$

Rezolvăm numeric folosind metoda lui Euler, programul Matlab este:

```
%exemplu Euler
a=0;b=1;        %capetele intervalului
h=0.2;          %pasul retelei
N=round((b-a)/h)+1; %numarul de noduri
y=zeros(N,1);%initializam vectorul solutie
y(1)=1;         %conditia initiala

for i=2:N
    t=(i-1)*h;
    y(i)=y(i-1)+h*t^2*y(i-1);
end

plot(a:h:b,y,'-ob') %reprezentam grafic solutia numerica
hold on
t1=a:0.1*h:b;
yexact=exp(t1.^3/3);%solutia exacta
plot(t1, yexact,'r')%reprezentam grafic solutia analitica
```

| Nodul | $h = 0.2$ | $h = 0.1$ | $h = 0.01$ | analitic |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.00000 | 1.00000 | 1.00000 | 1.00000 |
| 0.2 | 1.00800 | 1.00500 | 1.00287 | 1.00267 |
| 0.4 | 1.04025 | 1.03027 | 1.02237 | 1.02156 |
| 0.6 | 1.11515 | 1.09404 | 1.07651 | 1.07465 |
| 0.8 | 1.25789 | 1.22110 | 1.18951 | 1.18609 |
| 1.0 | 1.50947 | 1.45201 | 1.40120 | 1.39561 |

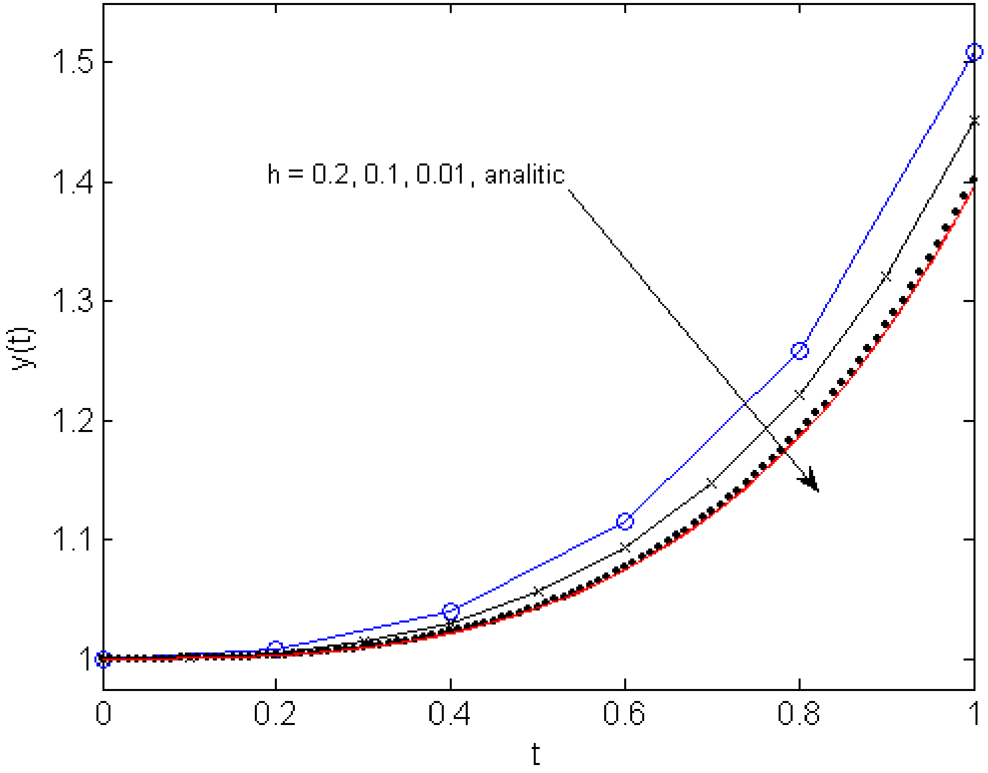


Figura 4. Soluţiile numerice şi soluţia analitică pentru problema descrisă în Exemplul 1.

Se observă că între soluţia numerică şi cea analitică există diferenţe şi că diferenţele scad pe măsură ce pasul este mai mic. De asemenea se observă că eroare se acumulează şi de asemenea se propagă pe măsură ce înaintăm în timp. Intuitiv se observă că diferenţa dintre soluţia exactă şi cea aproximativă într-un punct (local) este dată de restul din formula lui Taylor şi că este de ordinul $O(h^2)$. Totuşi după ce se calculează valorile pentru mai multe noduri, de exemplu $N-1$ noduri, eroarea propagată este $(N-1)\cdot O(h^2)$ şi ţinând cont că pasul $h=(b-a)/(N-1)$ avem o eroare propagată $\frac{b-a}{h}\cdot O(h^2)$, adică o eroare globală de trunchiere de ordinul $O(h)$.

Urmând definiţiile de mai sus şi ţinând cont de faptul că $\tilde{y}(t_i)$ este soluţia exactă, adică $\tilde{y}'(t)=f(t,\tilde{y}(t))=f(t_i,y_i)$, avem:

$$T(t_i,y_i,h)=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-\frac{\tilde{y}(t_{i+1})-\tilde{y}(t_i)}{h}=f(t_i,y_i)-\frac{\tilde{y}(t_{i+1})-\tilde{y}(t_i)}{h}=\tilde{y}'(t_i)-\frac{\tilde{y}(t_{i+1})-\tilde{y}(t_i)}{h}$$

şi dezvoltând $\tilde{y}(t_{i+1}) = \tilde{y}(t_i + h)$ obţinem:

$$T(t_i, y_i, h) = \tilde{y}'(t_i) - \frac{1}{h}\left[\tilde{y}(t_i) + h\tilde{y}'(t_i) + \frac{1}{2}h^2\tilde{y}''(\xi) - \tilde{y}(t_i)\right] = -\frac{1}{2}h\tilde{y}''(\xi), \quad \xi \in (t_i, t_{i+1}). \tag{1.15}$$

Dacă $f(t, \tilde{y}(t))$ este de clasă $C^1$, avem

$$\tilde{y}''(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}}\frac{d\tilde{y}}{dt}\right](t, \tilde{y}(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f\,\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}}\right](t, \tilde{y}(t))$$

mărginită în intervalul $[t_i, t_{i+1}]$ deoarece funcţia $f(t, \tilde{y}(t))$ şi derivatele ei parţiale sunt mărginite. Atunci putem scrie (1.15) sub forma:

$$T(t_i, y_i, h) = -\frac{1}{2}h\left[f_t + ff_{\tilde{y}}\right](\xi, \tilde{y}(\xi)), \qquad \text{adică} \qquad \left\|T(t_i, y_i, h)\right\| < Ch$$

şi deci, metoda lui Euler este de ordin $p = 1$. Dacă considerăm $f(t, \tilde{y}(t))$ de clasă $C^2$atunci putem merge mai departe cu dezvoltarea în serie Taylor şi obţinem:

$$T(t_i, y_i, h) = -\frac{1}{2}h\left[f_t + ff_{\tilde{y}}\right](t_i, y_i)) + O(h^2), \quad h \to 0$$

şi obţinem o funcţie de eroare principală

$$\tau(t_i, y_i) = -\frac{1}{2} h\left[f_t + f f_{\tilde{y}}\right](t_i, y_i)$$

Dorim să analizăm efectul unei perturbaţii mici de mărime $\delta$ în $y_m$ pentru o ecuaţie diferenţială dată (1.10) şi un pas dat $h$ şi să vedem în ce condiţii eroarea propagată este mai mică decât $\delta$ pentru orice $y_n,\ n > m$.

O astfel de perturbaţie poate să apară din cauza erorilor de reprezentare a numerelor în calculator.. O metodă va fi stabilă dacă nu va amplifica aceste erori. Considerăm următorul exemplu:

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0,\ \lambda = \text{constant} \tag{1.16}$$

care are soluţia analitică $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$. Aplicăm metoda lui Euler (1.13) şi avem:

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda) y_i$$

ceea ce conduce la:

$$y_1 = (1 + h\lambda) y_0$$

$$y_2 = (1 + h\lambda) y_1 = (1 + h\lambda)^2 y_0$$

$$\ldots$$

$$y_n = (1 + h\lambda) y_{n-1} = (1 + h\lambda)^n y_0$$

Dacă considerăm că am pornit de la valoarea iniţială perturbată $z_0 = y_0 + \delta$ atunci $z_n = (1 + h\lambda)^n (y_0 + \delta) = y_n + (1 + h\lambda)^n \delta$, iar eroarea propagată va fi

$$z_n - y_n = (1 + h\lambda)^n \delta$$

Dacă dorim ca această eroare sa fie mai mică decât perturbaţia iniţială, atunci trebuie să impunem condiţia $(1 + h\lambda)^n \delta < \delta$, adică:

$$\left|(1 + h\lambda)\right| \le 1.$$

Mărimea $\left|(1 + h\lambda)\right|$ se numeşte factor de amplificare. Pentru a fi îndeplinită condiţia de mai sus trebuie ca: $h\lambda \in [-2, 0]$ ceea ce înseamnă că eroarea se va amplifica infinit pentru $\lambda > 0$, iar pentru $\lambda < 0$ dacă $|\lambda| >> 1$ atunci pasul $h$

trebuie să fie foarte mic. Acest lucru face ca metoda explicită a lui Euler să fie de obicei neutilizabilă.

### *1.2.2. Metoda implicită a lui Euler*

O soluţie a problemei descrise mai sus este metoda implicită a lui Euler:

$$\begin{aligned} & y_0 = y_a \\ & y_{i+1} = y_i + h\, f(t_{i+1}, y_{i+1}), \qquad i = 0,1,\ldots, N-1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

în care, spre deosebire de metoda explicită, pasul se va considera la momentul $i+1$ în loc de $i$ în funcţia $f$.

Considerăm din nou problema de mai sus (1.16) care în cazul implicit se discretizează astfel:

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_{i+1} = \frac{1}{(1-h\lambda)} y_i$$

$$y_n == \frac{1}{(1-h\lambda)^n} y_0$$

iar pentru mărginirea erorii propagate trebuie impusă condiţia:

$$\frac{1}{|1-h\lambda|} \le 1 \text{ sau } |1-h\lambda| \ge 1 \text{ sau } h\lambda \notin (0,2).$$

Aşadar metoda implicită poate fi utilizată fără restricţie pentru orice $\lambda < 0$, iar pentru $\lambda > 0$ se pot utiliza paşi $h$ de mărime rezonabilă.

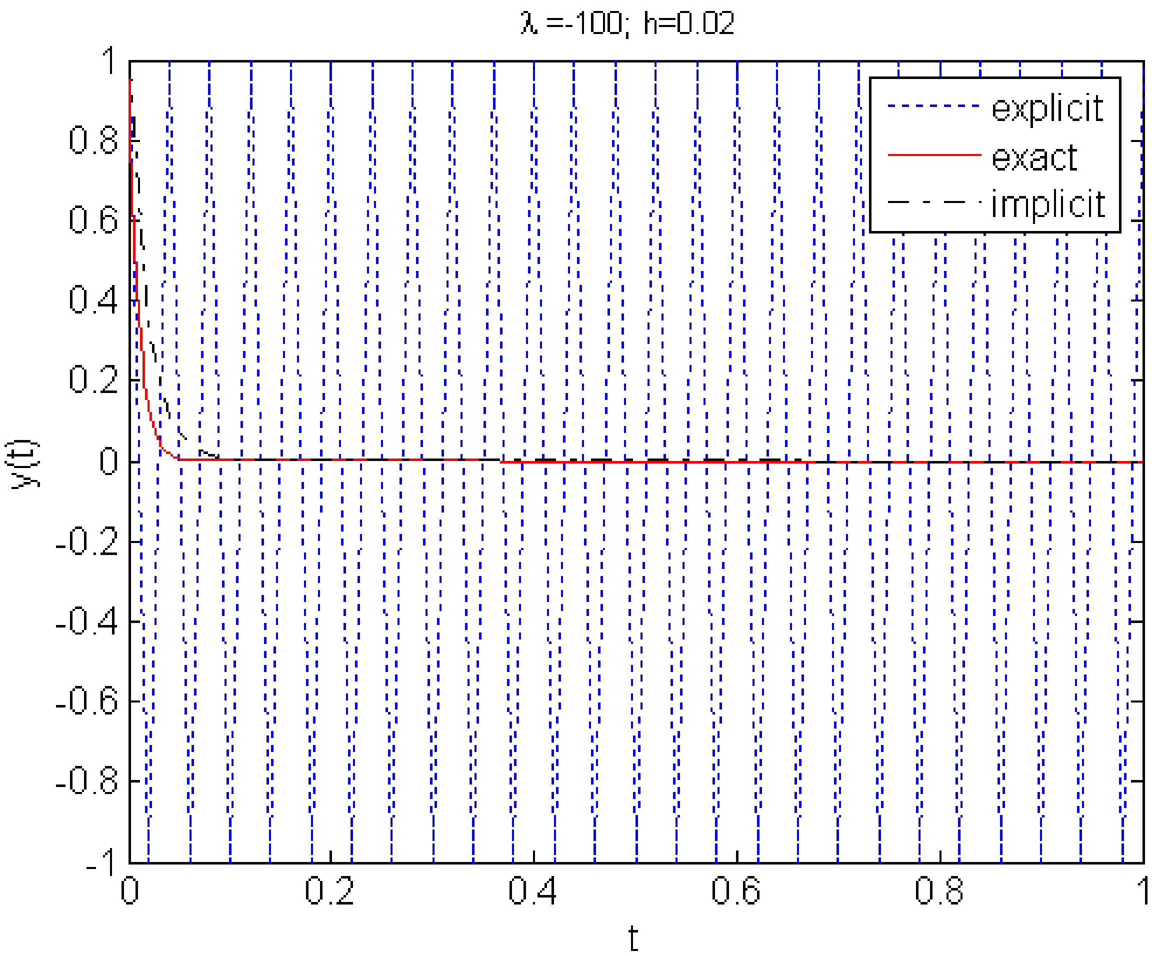


Figura 5. Soluţiile numerice şi soluţia analitică pentru (1.16).

Considerăm din nou problema Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{1.18}$$

Având în vedere că metoda lui Euler s-a obţinut prin trunchierea unei serii Taylor la doi termeni, o nouă metodă se poate obţine în mod natural, aşa cum a propus chiar Euler, prin reţinerea mai multor termeni în serie. Considerăm o reţea de puncte în intervalul $[a,b]$

$$a, a+h, a+2h, ..., a+ih, ..., a+(N-1)h, b$$

sau

$$t_i = a + ih, \;\; i = 1, ..., N$$

Sir Brook Taylor
(1685 – 1731)

Astfel putem scrie într-un punct $t_{i+1}$:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + h\,y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i) \tag{1.19}$$

unde $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$. Prin diferenţieri succesive ale soluţiei problemei (1.18) avem:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y''(t) &= f'(t, y(t)) \\ &\ldots \\ y^{(n)}(t) &= f^{(n-1)}(t, y(t)) \end{aligned} \tag{1.20}$$

şi înlocuind relaţiile (1.20) în ecuaţia (1.19) avem:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\,f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(t_i, y_i)(\xi_i) \tag{1.21}$$

Renunţând la rest obţinem metoda dezvoltării în serie Taylor:

$$y_0 = y_a$$
$$y_{i+1} = y_i + h\phi^{(n)}(t_i, y_i, h), \quad i = 0, 1, ..., N-1 \qquad (1.22)$$

unde

$$\phi^{(n)}(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, y_i) + ... + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y_i)$$

Se poate observa că metoda lui Euler este un caz particular al metodei dezvoltării în serie Taylor şi are loc pentru $n = 1$.

Exemplu 1: Fie problema Cauchy

$$y'(t) = te^{-y(t)}, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0,3]$$

care are soluţia analitică $y(t) = \ln\left(e + \frac{t^2}{2}\right)$

Putem scrie dezvoltarea în serie Taylor de ordinul 3:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y_i) + \frac{h^3}{6!} f''(t_i, y_i)$$

unde ţinând cont că $y = y(t)$ avem:

$$\begin{aligned}
f(t, y) &= te^{-y} \\
f'(t, y) &= e^{-y} - ty' e^{-y} = e^{-y}(1 - ty') = e^{-y}\left(1 - t^2 e^{-y}\right) \\
f''(t, y) &= -y' e^{-y}\left(1 - t^2 e^{-y}\right) + e^{-y}\left(-2te^{-y} + t^2 y' e^{-y}\right) \\
&= e^{-y}\left(-3t + 2t^3 e^{-y}\right)
\end{aligned}$$

Rezolvăm numeric folosind metoda lui Taylor pentru $n = 1, 2, 3$, iar programul Matlab este:

```
%exemplu Taylor
a=0;b=3;      %capetele intervalului
N=10;        %pasul retelei
```

```
h=(b-a)/(N-1); %numarul de noduri
y1=zeros(N,1);%initializam vectorul solutie pentru n=1
y2=zeros(N,1);%initializam vectorul solutie pentru n=2
y3=zeros(N,1);%initializam vectorul solutie pentru n=3
y1(1)=1; y2(1)=1; y3(1)=1;      %conditia initiala

t=a:h:b
for i=2:N
     y1(i)=y1(i-1)+h*t(i-1)*exp(-y1(i-1));
     y2(i)=y2(i-1)+h*t(i-1)*exp(-y2(i-1))+...
                 0.5*h^2*exp(-y2(i-1))*(1-t(i-1)^2*exp(-y2(i-1)));
     y3(i)=y3(i-1)+h*t(i-1)*exp(-y3(i-1))+...
              0.5*h^2*exp(-y3(i-1))*(1-t(i-1)^2*exp(-y3(i-1)))+...
          1/6*h^3*exp(-2*y3(i-1))*(-3*t(i-1)+2*t(i-1)^3*exp(-y3(i-
1)));
end
hold on
plot(a:h:b,y1,'.-k') %reprezentam grafic solutia numerica
plot(a:h:b,y2,':k')
plot(a:h:b,y3,'k')

t1=a:h:b;
yexact=log(exp(1)+t1.^2/2);
plot(t1, yexact,'r')%reprezentam grafic solutia analitica
```

| Nodul | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | exact |
|---|---|---|---|---|
| 0.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.3333 | 1.0000 | 1.0204 | 1.0204 | 1.0202 |
| 0.6667 | 1.0409 | 1.0797 | 1.0789 | 1.0786 |
| 1.0000 | 1.1194 | 1.1712 | 1.1692 | 1.1688 |
| 1.3333 | 1.2282 | 1.2864 | 1.2832 | 1.2829 |
| 1.6667 | 1.3583 | 1.4170 | 1.4129 | 1.4127 |
| 2.0000 | 1.5012 | 1.5561 | 1.5516 | 1.5514 |
| 2.3333 | 1.6497 | 1.6986 | 1.6939 | 1.6939 |
| 2.6667 | 1.7991 | 1.8409 | 1.8364 | 1.8364 |
| 3.0000 | 1.9462 | 1.9808 | 1.9766 | 1.9766 |

Eroarea locala de trunchiere a metodei

$$T(t_i, y_i, h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{\tilde{y}(t_{i+1}) - \tilde{y}(t_i)}{h} = \phi^{(n)}(t_i, y_i, h) - \frac{\tilde{y}(t_{i+1}) - \tilde{y}(t_i)}{h} =$$

$$= \phi^{(n)}(t_i, y_i, h) - \frac{1}{h}\left[\tilde{y}(t_i) + h\tilde{y}'(t_i) + \frac{1}{2}h^2 + \ldots + \frac{h^n}{n!}\tilde{y}^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\tilde{y}^{(n+1)}(\xi) - \tilde{y}(t_i)\right]$$

$$= -\frac{h^n}{(n+1)!}\tilde{y}^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [t_{i+1}, t_i]$$

unde am considerat că $\tilde{y}(t_i)$ este soluţia exactă, iar $f^{(k)}$ reprezintă diferenţiala de ordinul $k$ funcţiei $f$. Avem atunci:

$$\left\| T(t_i, y_i, h) \right\| \le \frac{C_n}{(n+1)!} h^n \tag{1.23}$$

deci metoda este de ordinul $O\left(h^n\right)$iar funcţia de eroare principală va fi

$$\tau\left(t_i, y_i\right) = -\frac{1}{\left(n+1\right)!} f^{(n)}(t_i, y_i) \tag{1.24}$$

Se observă că pentru a obţine o metodă de ordin mare este necesar să calculam mai multe derivate parţiale, lucru care poate fi efectuat cu ajutorul calculului simbolic.

### *1.2.3. Metode de tip Euler îmbunătăţite*

În metoda lui Euler trecerea de la pasul $i$ la pasul următor $i+1$ se face urmând panta soluţiei în punctul curent. Se poate încerca îmbunătăţirea metodei dacă evaluarea se face mai repede, în mijlocul intervalului $\left[t_i, t_{i+1}\right]$:

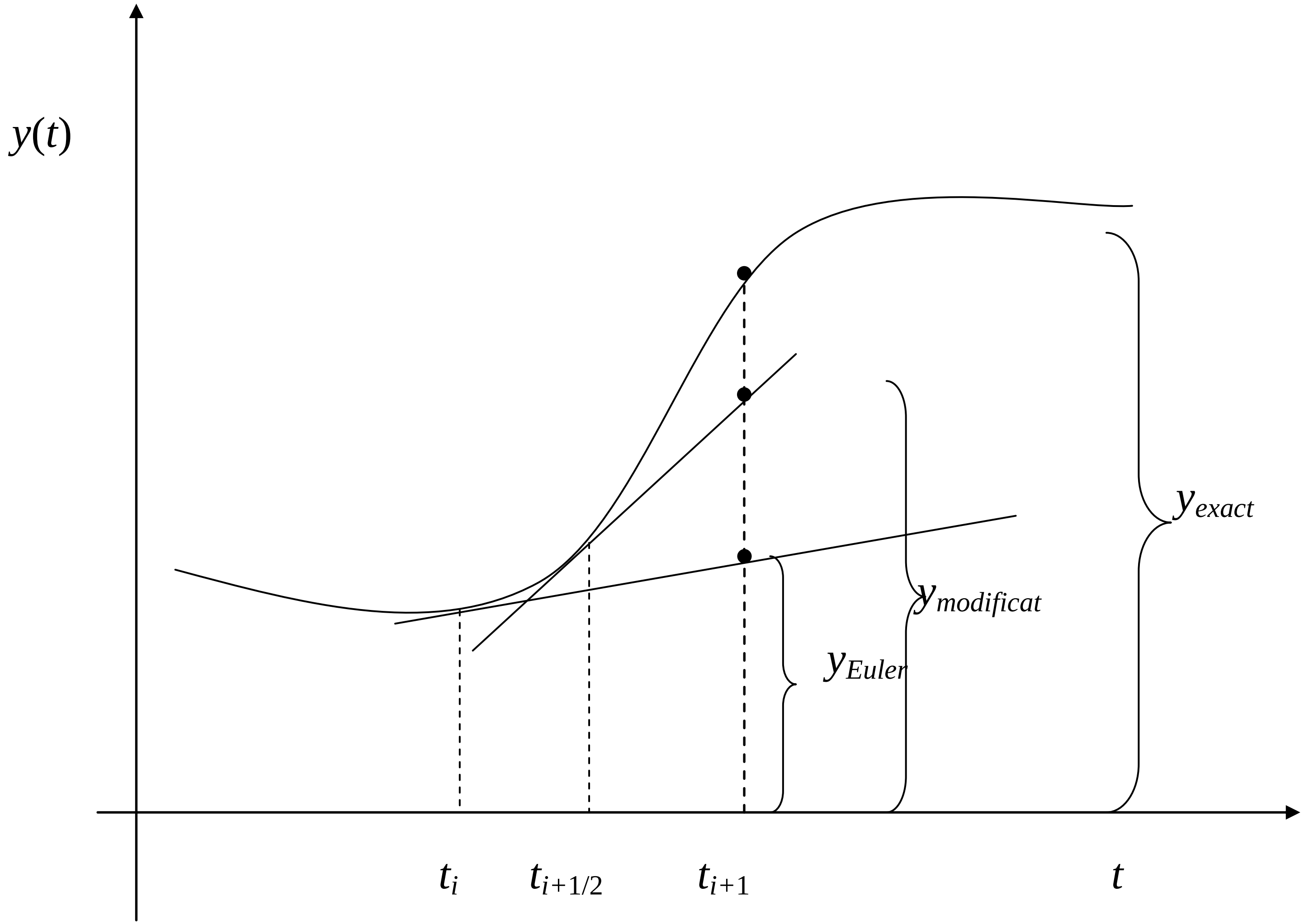


Figura 7. Aproximarea în metoda Euler modificată

Dacă evaluarea se face în mijlocul intervalului $[t_i, t_{i+1}]$, adică în punctul $t_{i+1/2} \overset{not}{=} t_i + \frac{1}{2}h$ atunci metoda se scrie:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) = y(t_i) + h\, f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(t_i, y_i)\right) \quad (1.25)$$

unde pentru a calcula $y_{i+1/2}$ am folosit metoda lui Euler explicită cu pasul $\frac{1}{2}h$. Se observă că pentru a trece la pasul următor este necesară o „imbricare", adică avem de calculat $f\left(x_2, f(x_1, y_1)\right)$ şi din motive de implementare vom scrie:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, \underbrace{f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h\underbrace{f(t_i, y_i)}_{K_1(t_i, y_i)}\right)}_{K_2(t_i, y_i, h)}$$

sau

$$
\begin{aligned}
&K_1(t_i, y_i) = f(t_i, y_i) \\
&K_2(t_i, y_i, h) = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_1\right) \qquad (1.26) \\
&y_{i+1} = y_i + hK_2
\end{aligned}
$$

Metoda descrisă de ecuaţiile (1.26) poartă denumirea de **metoda lui Euler modificată.**

O altă posibilitate de îmbunătăţire a metodei lui Euler este să evaluăm panta în punctele $(t_i, y_i)$ şi $(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))$ şi să alegem ca şi pantă de continuare media lor aritmetică. Se obţine astfel o nouă metodă numită **metoda lui Heun** (Karl Heun, 1859 – 1929**)** sau metoda explicită a trapezului:

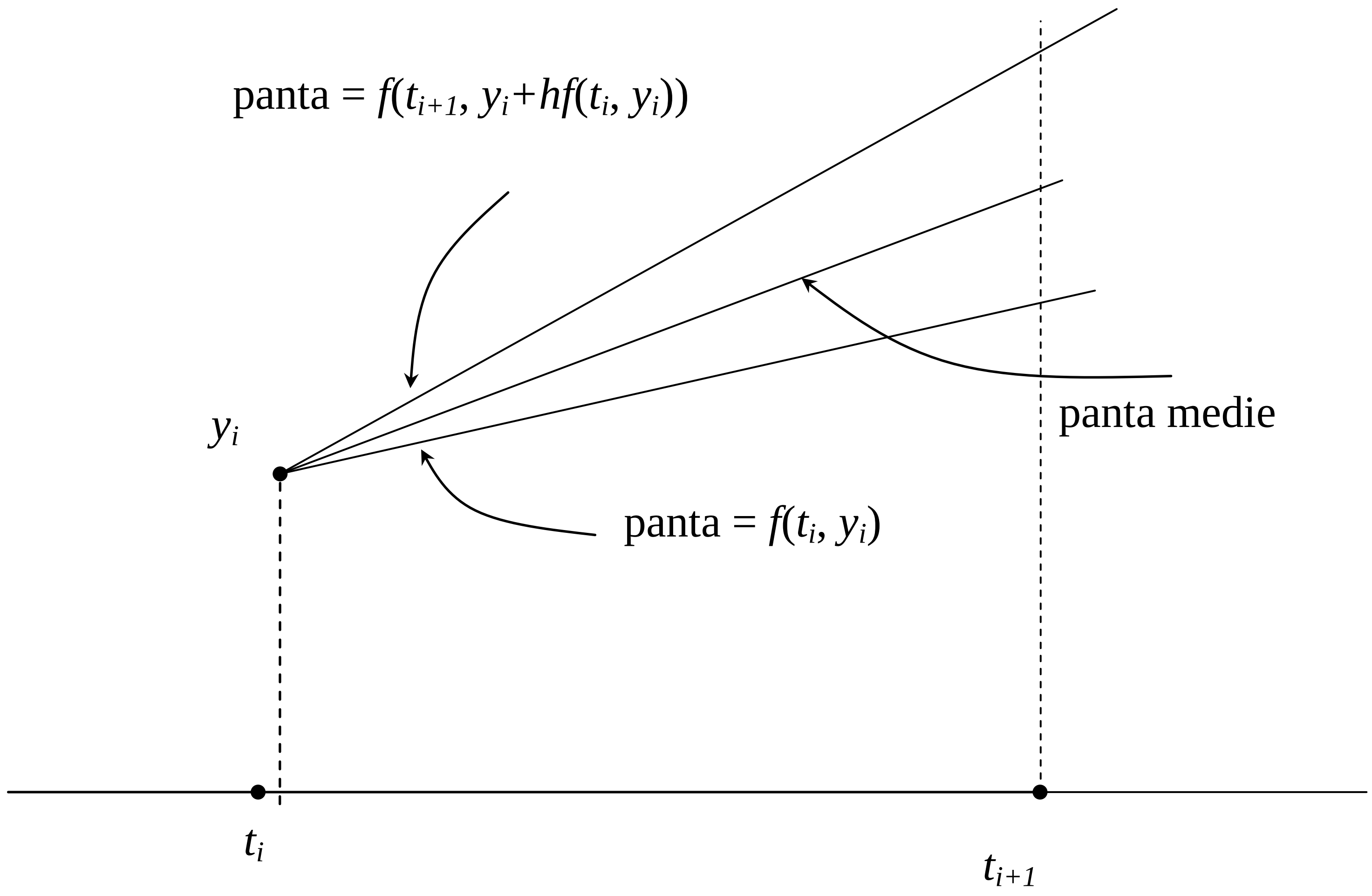


Figura 8. Aproximarea în metoda lui Heun

$$
\begin{aligned}
&K_1(t_i, y_i) = f(t_i, y_i) \\
&K_2(t_i, y_i, h) = f\left(t_i + h, y_i + hK_1\right) \\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h\left(K_1 + K_2\right)
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Vom arăta ulterior că ordinul de exactitate al metodei lui Euler modificate şi a metodei lui Heun este $O\left(h^2\right)$.

Exemplu 1: Fie problema Cauchy

$$y'(t) = y(t) - e^t, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0,1]$$

care are soluţia analitică $y(t) = -te^t$

Dam în continuare programul Matlab care rezolvă ecuaţia diferenţială folosind metoda modificată a lui Euler:

```
%exemplu metoda Euler modificată
a=0;b=1;      %capetele intervalului
N=11;        %pasul retelei
h=(b-a)/(N-1) %numarul de noduri

y=zeros(N,1);%initializam vectorul solutie pentru Euler
modificat
ye=zeros(N,1);%solutia exacta
y(1)=0;ye(1)=0;      %conditia initiala
t=a:h:b; %pasii de timp

for i=2:N
     K1=y(i-1)-exp(t(i-1));
     K2=y(i-1)+0.5*h*K1-exp(t(i-1)+0.5*h);
     y(i)=y(i-1)+h*K2;
     ye(i)=-t(i)*exp(t(i));
end
```

```
plot(a:h:b,y,'.k') %reprezentam grafic solutia numerica
hold on
plot(a:h:b,ye,'b') %reprezentam grafic solutia exacta
[t' ye y abs(ye-y)]   %afisam valorile in noduri si eroarea
```

şi programul Matlab pentru metoda lui Heun:

```
%exemplu Heun
a=0;b=1;     %capetele intervalului
N=11;        %pasul retelei
h=(b-a)/(N-1) %numarul de noduri

y=zeros(N,1);%initializam vectorul solutie pentru Heun
ye=zeros(N,1);%solutia exacta
y(1)=0;ye(1)=0;     %conditia initiala
t=a:h:b; %pasii de timp

for i=2:N
     K1=y(i-1)-exp(t(i-1));
     K2=y(i-1)+h*K1-exp(t(i));
```

```
    y(i)=y(i-1)+0.5*h*(K1+K2);
    ye(i)=-t(i)*exp(t(i));
end

plot(a:h:b,y,'.k') %reprezentam grafic solutia numerica
hold on
plot(a:h:b,ye,'b') %reprezentam grafic solutia exacta
[t' ye y abs(ye-y)]   %afisam valorile in noduri si eroarea
```

| Nodul | $y$, exact | $y_E$ | $\lvert y-y_E\rvert$ | $y_{Em}$ | $\lvert y-y_{Em}\rvert$ | $y_H$ | $\lvert y-y_H\rvert$ |
|---:|---:|---:|---:|---:|---:|---:|---:|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1 | -0.1105 | -0.1000 | 0.0105 | -0.1101 | 0.0004 | -0.1103 | 0.0003 |
| 0.2 | -0.2443 | -0.2321 | 0.0122 | -0.2434 | 0.0009 | -0.2437 | 0.0006 |
| 0.3 | -0.4050 | -0.3908 | 0.0141 | -0.4035 | 0.0015 | -0.4039 | 0.0010 |
| 0.4 | -0.5967 | -0.5804 | 0.0163 | -0.5945 | 0.0022 | -0.5952 | 0.0015 |
| 0.5 | -0.8244 | -0.8056 | 0.0188 | -0.8212 | 0.0032 | -0.8222 | 0.0022 |
| 0.6 | -1.0933 | -1.0717 | 0.0216 | -1.0890 | 0.0043 | -1.0903 | 0.0030 |
| 0.7 | -1.4096 | -1.3848 | 0.0248 | -1.4040 | 0.0056 | -1.4057 | 0.0040 |
| 0.8 | -1.7804 | -1.7520 | 0.0285 | -1.7732 | 0.0072 | -1.7753 | 0.0051 |
| 0.9 | -2.2136 | -2.1810 | 0.0326 | -2.2045 | 0.0092 | -2.2071 | 0.0065 |
| 1.0 | -2.7183 | -2.6810 | 0.0373 | -2.7068 | 0.0115 | -2.7100 | 0.0082 |

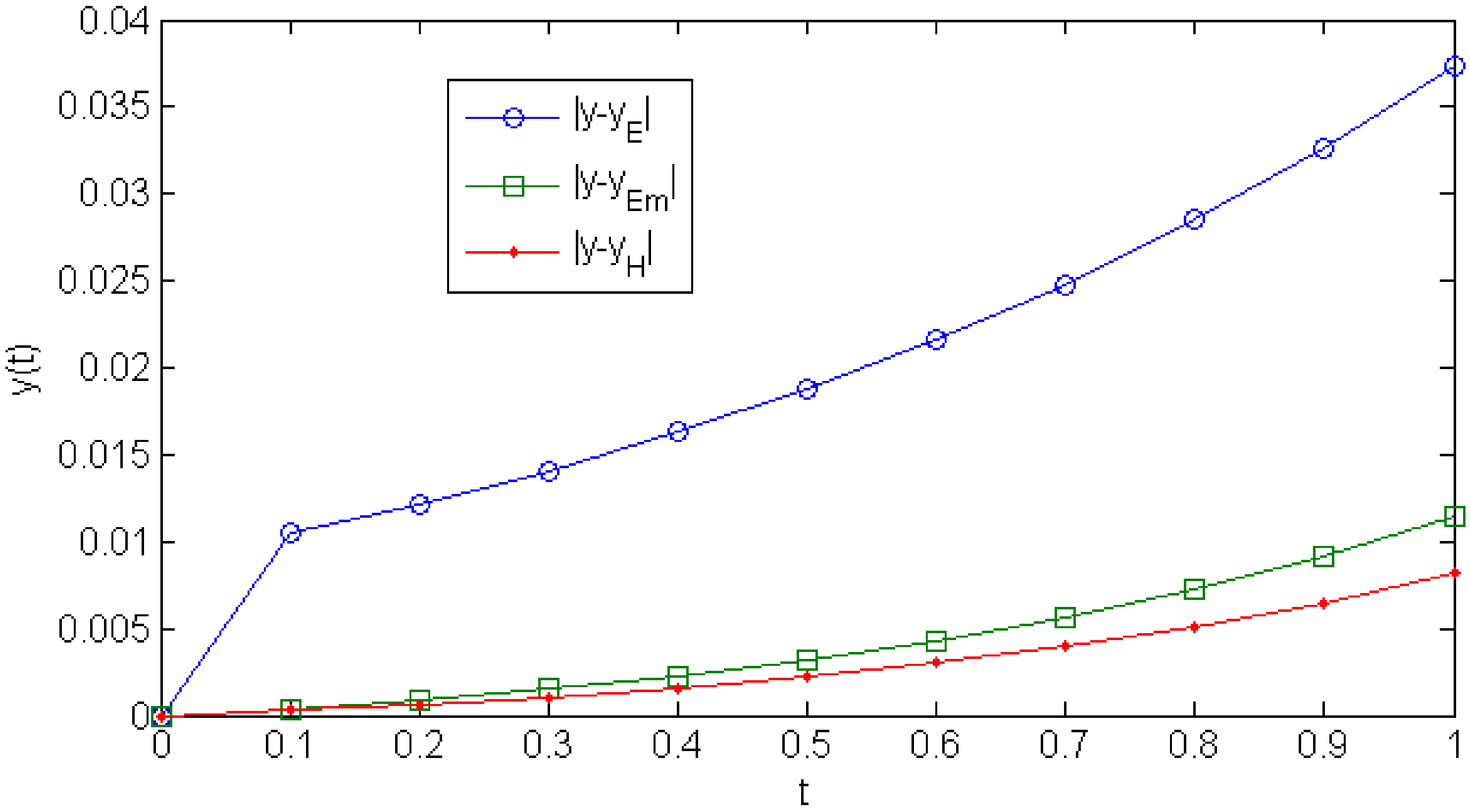


Figura 9. Variaţia erorii pentru metoda lui Euler, metoda lui Euler modificată şi metoda lui Heun

### *1.2.4. Metode de tip Runge – Kutta*

Considerăm problema cu valori iniţiale (1.18) şi dezvoltarea în serie Taylor (1.19). Am văzut că pentru a obţine o metodă de ordin superior folosind (1.22) apare necesitatea calculului derivatelor de ordin superior. Runge a arătat în 1885 că pentru calculul derivatelor superioare se pot folosi pasi intermediari de timp $t_i + ph \in [t_i, t_{i+1}]$, iar mai tarziu Kutta (1901) a implementat metoda.

Carl David Tolmé Runge
(1856 – 1927)

Martin Wilhelm Kutta
(1867 – 1944)

Vom exemplifica în continuare calculul metodei Runge-Kutta de ordin 2. Considerăm dezvoltarea în serie Taylor (1.19) pe care o trunchiem la derivata de ordinul 2:

$$y_{i+1} = y_i + h\,y'_i + \frac{h^2}{2}\,y''_i \tag{1.28}$$

Din (1.18) avem că $y'_i = f(t_i, y_i)$ iar prin derivare avem $y''_i = \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i)\,f(t_i, y_i)$ şi înlocuind în (1.28) avem:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\,f\right](t_i, y_i) \\ &= y_i + h\phi(t_i, y_i, h) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Folosind ideea lui Runge trebuie să gasim în continuare o aproximantă a lui $\phi$ astfel încât să difere de $\phi$ printr-o mărime de ordinul $O\left(h^2\right)$ sau de ordin mai mare şi care să nu depindă de $y''$. Pentru aceasta vom dezvolta formal pe $f$ considerată funcţie de două variabile $(t, y)$ în serie Taylor:

$$f(t+\Delta t, y+\Delta y) = f(t,y) + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}\Delta t \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right] \tag{1.30}$$

În ideea folosirii paşilor intermediari vom considera $\Delta t = ph$. Din relaţia (1.28) avem că $\Delta y = hy_i' + O(h^2)$, dar din considerentele expuse mai sus vom lua $\Delta y = qhy_i' = qhf(t_i, y_i)$. Înlocuim în ecuaţia (1.30) şi avem:

$$f(t_i + ph, y_i + qhf(t_i, y_i)) = f(t_i, y_i) + ph\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + qhf(t_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) + O(h^2) \tag{1.30}$$

Considerăm în continuare o funcţie corespunzătoare unei metode cu un pas de forma:

$$\tilde{\phi}(t_i, y_i, h) = c_1 f(t_i, y_i) + c_2 f(t_i + ph, y_i + qhf(t_i, y_i)) \tag{1.31}$$

unde $c_1, c_2$, $p$ şi $q$ sunt constante ce trebuie determinate. Înmulţind (1.30) cu $c_2$ şi înlocuim în (1.31) obţinem:

$$\tilde{\phi}(t_i, y_i, h) = (c_1 + c_2) f(t_i, y_i) + h\left[c_2 p \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + c_1 q f(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i)\right] + O\left(h^2\right) \tag{1.32}$$

Se observă că diferenţa dintre (1.31) şi (1.32) este de $O\left(h^2\right)$, iar pentru determinarea constantelor $c_1$, $c_2$, $p$ şi $q$ comparăm ecuaţiile (1.29) şi (1.32). Astfel se obţine:

$$c_1 + c_2 = 1, \quad , c_2 p = \frac{1}{2}, \quad c_2 q = \frac{1}{2} \tag{1.33}$$

Se observă că $p = q = \dfrac{1}{2c_2}$ şi $c_1 = 1 - c_2$, deci metoda nu are soluţie unică. Fixând valori pentru $c_2$ se obţine o familie de metode. De exemplu alegand $c_2 = \frac{1}{2}$ $(c_1 = \frac{1}{2}, p = q = 1)$ obţinem metoda lui Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h\left( f(t_i, y_i) + f\left(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)\right)\right)$$

iar alegând $c_2 = 1(c_1 = 0, p = q = \frac{1}{2})$ se obţine metoda lui Euler modificată:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(t_i, y_i)\right)$$

Din ecuaţia (1.30) se poate obţine eroarea de trunchiere pentru metodele de tip Runge-Kutta:

$$c_2 \frac{h^2}{2}\left[p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\eta,\xi) + 2pq\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\eta,\xi) + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta,\xi)\right], \quad (\eta,\xi) \in [t_i, t_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$$

şi se observă că pentru metoda lui Heun avem:

$$\frac{1}{2}\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\eta,\xi) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\eta,\xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta,\xi)\right]$$

iar pentru metoda lui Euler modificată

$$\frac{1}{4}\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\eta,\xi) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\eta,\xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta,\xi)\right].$$

Deci metodele Heun şi Euler modificată sunt de metode cu ordinul de exactitate $O(h^2)$, iar eroarea de trunchiere a metodei lui Euler modificate este jumătate din cea a metodei lui Heun.