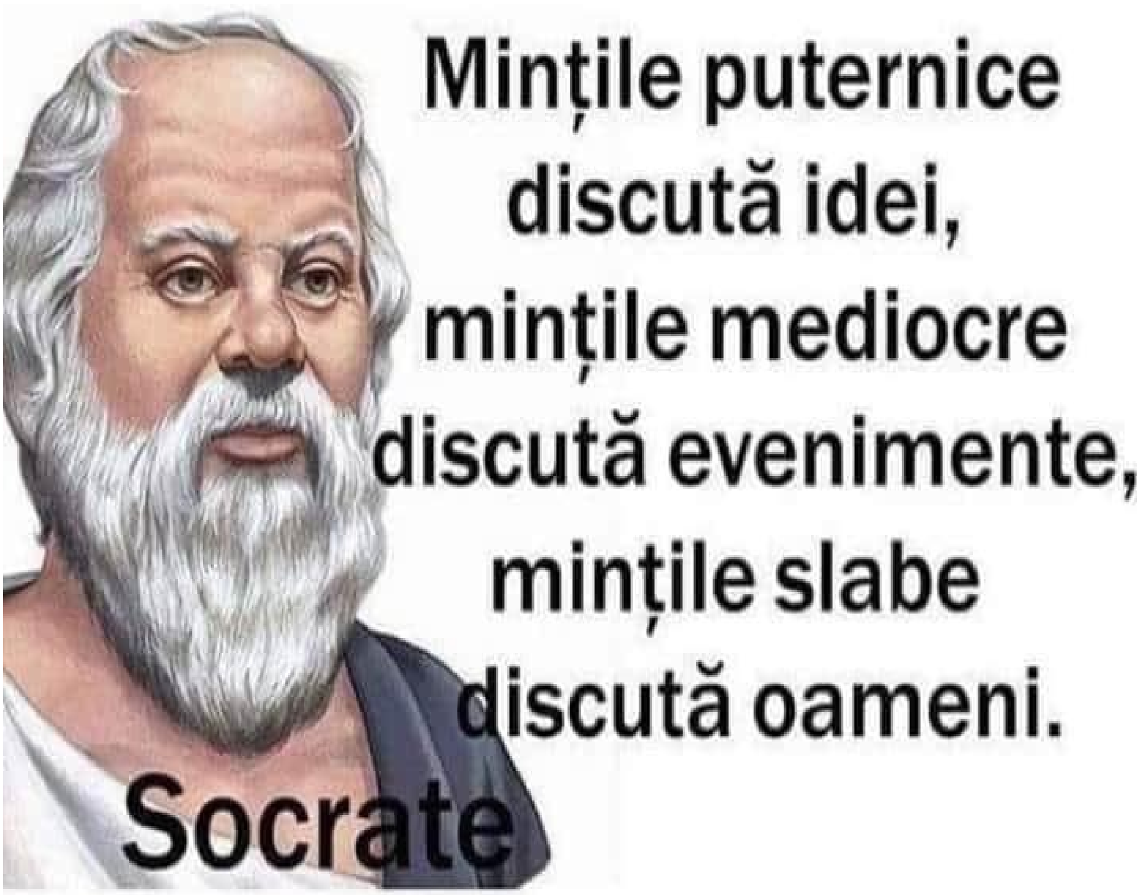
Adrian Petruşel

Ecuaţii Diferenţiale


Minţile puternice
discută idei,
minţile mediocre
discută evenimente,
minţile slabe
discută oameni.
Socrate

Cuprins

Introducere

Scopul acestui curs este de a prezenta principalele noţiuni şi rezultate din teoria ecuaţiilor diferenţiale şi a sistemelor dinamice generate de acestea. In plus, vom discuta tangenţial şi despre unele clase de ecuaţii integrale, ce se leagă în mod natural de unele probleme asociate ecuaţiilor diferenţiale de ordinul 1 sau ordinul 2. Principalele teme sunt: 1. Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale rezolvabile efectiv; 2. Modele matematice guvernate de ecuaţii diferenţiale; 3. Teoreme de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale via principiul contracţiei al lui Banach; 4. Sisteme de ecuaţii liniare de ordinul 1; 5. Sisteme dinamice generate de ecuaţii diferenţiale.

Materialul de faţă este împărţit pe capitole, fiecărui capitol corespunzând unui curs şi unui seminar. Cursul explică pe larg noţiunile şi rezultatele fundamentale mai sus enumerate, iar seminarul va considera exerciţii şi probleme aplicative (rezolvate şi propuse). Cât priveşte laboratorul, acesta se va face după programul afişat în orar. Titulari de laborator sunt colegii, lect.dr. Monica Bota şi drd. Andrei Stan. Tematica acestuia este următoarea:

1. Introducere în Maple/Sage; 2. Ecuaţii diferenţiale de ordinul 1; 3. Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 4. Ecuaţii diferenţiale de ordinul 2; 5. Modele matematice guvernate de ecuaţii diferenţiale; 6. Metoda aproximaţiilor succesive şi noţiuni de stabilitate; 7. Evaluare.

Prezenţa este obligatorie la seminar şi laborator, absenţa la mai mult de un laborator sau mai mult de două seminarii atrăgând după sine neprimirea în examenul din sesiunea şi, astfel, nepromovarea examenului. Temele rezolvate (10 exerciţii dintre cele propuse în primele 10 capitole, câte unul din fiecare capitol, la alegerea studentului) se încarcă pe platforma MS - Teams, în echipa fiecărei grupe, în format pdf cu denumirea *nume.prenume.grupa.* De exemplu: *adrian.petrusel.121.* Termenul limită: 10 ianuarie 2022. In caz de similitudine între una sau mai multe teme, ambele/toate se anulează şi punctajul acordat va fi zero. De asemenea, în ceea ce priveşte conectarea la activitatea de seminar şi laborator, se va respecta componenţa anunţată a grupelor/subgrupelor.

Nota finală la disciplina *Ecuaţii diferenţiale* este compusă din: 10% - activitatea la curs şi seminar, 10% - realizarea temelor propuse, 20% - lucrarea de control de la seminar (săptămâna a şasea), 10% - realizarea proiectului de laborator, 50% - nota de la examenul scris din sesiune (care trebuie să fie minim 5,00).

Cursul de Ecuaţii Diferenţiale se va desfăşura pe platforma MS - Teams (MS - T). Date privind conectarea:

Conectare MS - T curs, Ecuaţii diferenţiale (Curs 2021-2022), cod: m6r9aeb

Conectare MS - T, seminarul grupei de Matematică (Ecuatii Diferentiale (Seminar: grupa 121, 2021-2022)), cod: d4z2u8o; titular seminar: Petruşel A.

Conectare MS - T, pentru seminarul grupei de Matematică informatică (Ecuatii Diferentiale (Seminar: grupa 321, 2021-2022)), cod: v98cyn8; titular seminar: Petruşel A.

Conectare MS - T, pentru seminarul grupei de Matematică informatică (322), cod: aknjsfx titular seminar: Bota M.

Conectare MS - T, pentru seminarul grupei de Matematică informatică (323), cod: frlflnq titular seminar: Bota M.

Studenţii sunt rugaţi să se înscrie la curs şi seminar, folosind informaţiile de mai sus. In cazul seminarului/laboratorului, prin platformă, vom transmite informaţii şi materiale utile pentru studenţi.

Alte informaţii:
A. Petruşel (http://math.ubbcluj.ro/ petrusel/),
M. Bota (http://math.ubbcluj.ro/ bmonica),
A. Stan (E-mail: andrei.stan.1@stud.ubbcluj.ro).

Adrian Petruşel Septembrie 2021

Capitolul 1

Noţiunea de ecuaţie diferenţială

1.1 Noţiunea de ecuaţie diferenţială. Tipuri de soluţii

O ecuaţie diferenţială este o ecuaţie în care necunoscuta este o funcţie de o variabilă reală (să zicem $x = x(t), t \in I$, cu I interval al axei reale) şi ea apare în ecuaţie împreună cu derivatele sale de ordin întreg.

Comentariu istoric. Se pare că termenul de "equatio differentialis" a fost folosit pentru prima dată în 1676 de Gotfried Wilhelm von Leibnitz pentru a desemna problema determinării unei funcţii ce satisface o relaţie în care apare ea şi unele derivate ale ei. Totuşi, un mare merit în lansarea acestui domeniu al matematicii, îl are Isaac Newton, cel care introduce în 1665 noţiunea de "fluxion", derivata de astăzi. Mai mult, în 1687, acelaşi Isaac Newton a introdus şi rezolvat un tip important de ecuaţie diferenţială, anume ecuaţia diferenţială liniară de ordinul I. Contribuţii importante la rezolvarea efectivă a ecuaţiilor diferenţiale au adus: Jean

Bernoulli, Jacopo Riccati, Leonard Euler, Jean Le Rond D' Alembert, Alexis Clairaut, Joseph Lagrange, ...

O ecuaţie diferenţială ordinară este o ecuaţie diferenţială în care funcţia necunoscută şi derivatele sale apar pe aceeaşi argument notat, de exemplu, cu t. Un exemplu de ecuaţie diferenţială ordinară este ecuaţia

$$x''(t) - t^2 x'(t) + 3tx^2(t) = \arctan t, t \in [0, \infty[.$$

Dacă în ecuaţia diferenţială există o modificare a argumentului, atunci ecuaţia respectivă se numeşte ecuaţie diferenţială cu argument modificat. De exemplu, dacă $\tau > 0$ este o constantă reală dată, atunci ecuaţia

$$x''(t) + 2x'(t) - x(t - \tau) = t^2,\ t \in \mathbb{R}$$

este o ecuaţie cu argument modificat, mai exact cu argument întârziat. O ecuaţie diferenţială de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ este o ecuaţie în care funcţia necunoscută apare împreună cu derivatele sale, iar ordinul cel mai mare al derivatei este n. De exemplu, ecuaţia

$$x''(t) - tx(t) = \sin t,\ t \in \mathbb{R}$$

este o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul 2.

Relativ recent, odată cu progresul realizat în domeniul derivatei de ordin fracţionar, o clasă importantă de ecuaţii o constituie clasa ecuaţiilor diferenţiale fracţionare.

In ceea ce urmează, dacă I este un interval al axei reale, vom nota cu $C(I, \mathbb{R}^n)$ spaţiul funcţiilor continue pe I cu valori în $\mathbb{R}^n$, iar cu $C^m(I, \mathbb{R}^n)$ spaţiul funcţiilor continue pe I cu toate derivatele continue pe I până la ordinul m. Dacă $n = 1$ vom scrie pe scurt $C(I)$ sau $C^m(I)$.

Definiţie. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe D. Un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 în formă normală Cauchy este dat de

$$X'(t) = f(t, X(t)). \tag{1.1}$$

Printr-o soluţie a sistemului (1.1) pe intervalul I al axei reale înţelegem o funcţie $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ce satisface:

(i) $Grafic(\varphi) := \{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset D$;

(ii) φ este derivabilă pe I;

(iii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, oricare ar fi $t \in I$.

Să remarcăm faptul că, din (ii) şi (iii), folosind faptul că f este continuă, avem că $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Observaţie. Dacă explicităm

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

respectiv

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

atunci (1.1) se reprezintă desfăşurat ca un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 de forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)), \\ \cdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)), \end{cases} \tag{1.2}$$

unde $f_i : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pentru $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Corespunzător, soluţia sistemului (1.2) se reprezintă

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \cdots \\ \varphi_n(t). \end{pmatrix}$$

Observaţie. In particular, $X'(t) = f(X(t))$ este un sistem autonom de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1. Deseori, mai ales în procesul de modelare matematică, suntem interesaţi de găsirea soluţiilor sistemelor autonome ce sunt constante în timp. Acestea se numesc soluţii echilibru sau soluţii staţionare ale sistemului dat. Evident, în aceste cazuri avem că $X'(t) = 0, t \in I$ şi, în consecinţă, soluţiile echilibru ale sistemului $X' = f(X)$ se obţin rezolvând sistemul $f(X) = 0$.

Comentariu istoric. Notaţiile derivatei unei funcţii $x = x(t)$ date de-a lungul timpului:

$$\frac{dx}{dt} - \text{ a fost dată de Leibnitz,}$$

$$\dot{x}(t) - \text{ a fost dată de Newton,}$$

$$x'(t) - \text{ a fost dată de Lagrange.}$$

Definiţie. Fie $F : E \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe E. O ecuaţie diferenţială de ordinul n în formă implicită este dată de

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \tag{1.3}$$

unde $x^{(n)}$ notează derivata de ordinul n a funcţiei x.

Printr-o soluţie a ecuaţiei (1.3) pe intervalul I al axei reale înţelegem o funcţie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ce satisface:

(i) $\varphi \in C^n(I, \mathbb{R})$;

(ii) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)) \in E$, oricare ar fi $t \in I$;

(iii) $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$, oricare ar fi $t \in I$.

Observaţie. In anumite condiţii, ecuaţia (1.3) poate fi rescrisă sub forma

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)), \tag{1.4}$$

ceea ce reprezintă forma normală Cauchy a unei ecuaţii diferentiale de ordinul n.

Exemplu. Fie ecuaţia diferenţială de ordinul 1 $x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}$. Funcţia $\varphi(t) = e^t, t \in \mathbb{R}$ este o soluţie explicită a ecuaţiei pe $\mathbb{R}$. Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei date este $S = \{\varphi(t) = ce^t, t \in \mathbb{R} : c \in \mathbb{R}\}$.

Definiţie. Fie J un interval al axei reale, $g : D := J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi ecuaţia diferenţială de ordinul 1

$$g(t, x(t), x'(t)) = 0, t \in J. \tag{1.5}$$

Prin definiţie, relaţia

$$h(t, \varphi(t)) = 0, t \in I \tag{1.6}$$

este o soluţie în formă implicită a ecuaţiei (1.5) pe intervalul $I \subseteq J$ dacă orice funcţie $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ ce verifică (1.6) pe intervalul I este o soluţie a ecuaţiei (1.5) pe intervalul I.

Exemplu. Fie ecuaţia diferenţială de ordinul 1 $x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}$. Relaţia

$$\ln |\varphi(t)| = t, t \in \mathbb{R}$$

defineşte o soluţie în formă implicită a ecuaţiei date pe $\mathbb{R}$.

Definiţie. Fie J un interval al axei reale, $g : D := J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi ecuaţia diferenţială de ordinul 1

$$g(t, x(t), x'(t)) = 0, t \in J. \tag{1.7}$$

Prin definiţie, relaţiile

$$\begin{cases} t = \psi(s), \\ x = \zeta(s), s \in I \end{cases} \tag{1.8}$$

(unde $\psi, \zeta \in C^1(I, \mathbb{R})$ sunt funcţii cunoscute) definesc o soluţie în formă parametrică a ecuaţiei (1.7) pe intervalul $I \subseteq J$ dacă:

(a) $\psi'(s) \neq 0$, oricare ar fi $s \in I$ şi $(\psi(s), \zeta(s), \frac{\zeta'(s)}{\psi'(s)}) \in D$ oricare ar fi $s \in I$;

(b) $g(\psi(s), \zeta(s), \frac{\zeta'(s)}{\psi'(s)}) = 0$, oricare ar fi $s \in I$.

Exemplu. Fie ecuaţia diferenţială de ordinul 1 $x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}$. Relaţiile

$$\begin{cases} t = s, \\ x = 2e^s, s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

definesc o soluţie în formă parametrică a ecuaţiei date.

Definiţie. Prin definiţie, graficul unei soluţii de ecuaţie diferenţială se numeşte curbă integrală.

1.2 Probleme asociate unor ecuaţii diferenţiale

În teoria ecuaţiilor diferenţiale şi, mai ales, în aplicaţiile în lumea reală ale acestora, câteva probleme asociate ecuaţiilor se studiază.

A. Problema cu condiţii iniţiale (Problema lui Cauchy).

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe D şi sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 dat de

$$X'(t) = f(t, X(t)). \tag{1.9}$$

Problema cu condiţii iniţiale asociată sistemului (1.9) constă în determinarea soluţiilor sistemului de mai sus se satisfac suplimentar condiţia

$$X(t_0) = X^0, \tag{1.10}$$

unde valoarea $(t_0, X^0) \in D$ este cunoscută.

In acest caz, problema cu condiţii iniţiale este reprezentată prin

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases}$$

Observaţie. Fie o ecuaţie diferenţială de ordinul n în forma normală Cauchy, de forma

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \tag{1.11}$$

unde $G : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă dată.

Ecuaţia de mai sus este echivalentă cu un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1. Intr-adevăr, notăm: $x_1 := x, x_2 := x', x_n := x^{(n-1)}$. Atunci (1.11) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \cdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = G(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)). \end{cases} \tag{1.12}$$

Astfel, dacă notăm

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \cdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

şi

$$X^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \cdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

folosind observaţia de mai sus, problema cu valori iniţiale asociată ecuaţiei (1.11) este:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \\ x(t_0) = x_1^0 \\ x'(t_0) = x_2^0 \\ \cdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{1.13}$$

unde valoarea $(t_0, X^0) \in D$ (cu $X^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$) este dată.

Cometariu istoric. Jean le Rond D'Alembert observă în 1770 că orice ecuaţie diferenţială de ordin superior se poate reduce în mod echivalent la un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1.

B. Problema cu condiţii pe frontieră (Probleme de tip Dirichlet/Neumann).

Fie o ecuaţie diferenţială de ordinul 2 în forma normală Cauchy, de forma

$$x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), \tag{1.14}$$

unde $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă dată, iar $[a, b]$ este un interval nedegenarat al axei reale.

Printr-o problemă cu condiţii pe frontieră de tip Dirichlet asociată ecuaţiei (1.14) înţelegem următoarea problemă

$$\begin{cases} x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), t \in [a, b] \\ x(a) = \alpha \\ x(b) = \beta, \end{cases} \tag{1.15}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt valori cunoscute.

Printr-o problemă cu condiţii pe frontieră de tip Neumann asociată ecuaţiei (1.14) înţelegem următoarea problemă

$$\begin{cases} x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), t \in [a, b] \\ x'(a) = \alpha \\ x'(b) = \beta, \end{cases} \tag{1.16}$$

Dacă ecuaţiei (1.14) asociem condiţii pe frontieră de tipul

$$\begin{cases} a_1 x(a) + a_2 x'(a) = \alpha \\ b_1 x(b) + b_2 x'(b) = \beta, \end{cases} \tag{1.17}$$

unde $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt valori date, avem o problemă cu condiţii pe frontieră de tip mixt.

1.3 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Fie ecuaţia diferenţială $x'(t) = g(t), t \in I$ (unde $g \in C(I)$ şi $I \subset \mathbb{R}$ este un interval).
Se cere:

a) să se scrie mulţimea soluţiilor ei;

b) să se rezolve explicit în cazurile $g(t) = t \cos t, g(t) = t^2 \ln t, g(t) = \arcsin t, g(t) = \arctan t$, precizându-se de fiecare dată domeniul maxim.

c) să se rezolve problema

$$\begin{cases} x'(t) = g(t) \\ x(1) = 1, \end{cases}$$

unde $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ este dată de relaţia

$$g(t) = \begin{cases} 2t - 1, \ t \in [0, 1], \\ te^{t-1}, \ t \in]1, 2]. \end{cases}$$

2) Fie ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = 2x(t), t \in [0, \infty[.$$

a) Daţi exemple de soluţii ale ecuaţiei: soluţie în formă explicită, soluţie în formă implicită şi soluţie în formă parametrică.

b) Precizaţi o soluţie a problemei cu valori iniţiale formată din ecuaţia dată şi condiţia $x(0) = -1$.

3) Fie problema cu valori iniţiale (problema lui Cauchy)

$$\begin{cases} x'(t) = -2t, t \in \mathbb{R} \\ x(1) = \eta, \end{cases} \tag{1.18}$$

unde $\eta \in \mathbb{R}$ este dată. Precizaţi o soluţie a acestei probleme.

4) Fie ecuaţia diferenţială $x''(t) = g(t), t \in I$ (unde $g \in C(I)$, iar $I \subset \mathbb{R}$ este un interval). Se cere să se scrie mulţimea soluţiilor ei.

5) Fie problema Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) = x(t), t \in [0, 1] \\ x(0) = 1, x(1) = \frac{2}{e} - e. \end{cases} \tag{1.19}$$

Precizaţi o soluţie a a acestei probleme.

B. Exerciţii propuse.

1) Să se rezolve problema

$$\begin{cases} x'(t) = g(t) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de relaţia

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, \ t \in [0, \infty[, \\ \ln(t^2 + 1), \ t \in] - \infty, 0[. \end{cases}$$

2) Fie ecuaţia diferenţială $x'(t) = -x(t), t \in \mathbb{R}$. Daţi exemple de soluţii ale ecuaţiei: soluţie în formă explicită, soluţie în formă implicită şi soluţie în formă parametrică.

3) Fie problema cu valori iniţiale (problema lui Cauchy)

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), t \in [0, \infty[\\ x(0) = \eta, \end{cases} \tag{1.20}$$

unde $\eta \in \mathbb{R}$ este dată. Precizaţi o soluţie a acestei probleme.

4) Fie problema Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases} \tag{1.21}$$

Precizaţi o soluţie a a acestei probleme.

1.4 Concluzii

In acest paragraf am prezentat câteva clase de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale, precum şi cele mai importante tipuri de probleme asociate lor. A fost definită noţiunea de soluţie, în cele trei ipostaze în care ea poate să apară: soluţie în formă explicită, soluţie în formă implicită şi soluţie în formă parametrică. Prin exemple şi exerciţii, "am ghicit" expresii ale soluţiilor, fără să aven (deocamdată) o metodă riguroasă şi clară de rezolvare.

In ceea ce urmează ne va interesa:

1) metode de rezolvare efectivă a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale (până la ordinul 2);

2) studiul existenţei, unicităţii, aproximării şi a dependenţei continue de date pentru probleme asociate unor clase de ecuaţii diferenţiale;

3) aspecte dinamice în teoria ecuaţiilor diferenţiale.

Bibliografie

[1] R. PRECUP, Ecuaţii diferenţiale, Risoprint, Cluj-Napoca, 2011.

[2] I.A. RUS, Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice, Transilvania Press, Cluj, 1996.

[3] I.A. RUS , P. PAVEL, Ecuaţii diferenţiale, Ed. Did. Pedag., Bucuresti, 1982.

[4] V. BARBU, Ecuaţii diferenţiale, Ed. Junimea, Iaşi, 1985.

[5] I.I. VRABIE, Differential Equations, World Scientific, New Jersey, 2011.

[6] A. CERNEA, Elemente de teoria ecuaţiilor diferenţiale, Editura Univ. Bucureşti, 2010.

[7] D.V. IONESCU, Ecuaţii diferenţiale şi integrale, Ed. Did. Ped., Bucuresti, 1972.

[8] L. PERKO, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 2001

[9] A. GRANAS, J. DUGUNDJI, Fixed Point Theory, Springer, Berlin, 2003.

[10] E. ZEIDLER, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I. Fixed Point Theorems, Springer Verlag, New York, 1986.