2. FELADATLAP **Görbék és felületek elmélete**

Másodrendű felületek tanulmányozása

I. A gömb

1. Mutassuk ki, hogy az

$$(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

$$(S_2) : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x - 8y - 24z + 66 = 0$$

$$(S_3) : 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 30x - 30y - 60z + 402 = 0$$

gömbök sugarai egyenlőek és középpontjai kollineárisak. E: $r = 4$

2. Írjuk fel az O(0,0,0), A(4,0,0), B(0,6,0), C(2,1,1) pontokon átmenő gömb egyenletét, és mutassuk ki, hogy érinti a $2x + 3y - 4z - 58 = 0$ síkot. E: $M_0(2, 3, -4), r = \sqrt{29}$

3. Írjuk fel annak a gömbnek az egyenletét, amelynek középpontja a $P_1 : 2x - y + z - 4 = 0$ síkban van és érinti a $P_2 : 4x + 3z - 29 = 0$ síkot a $T(5, -2, 3)$ pontban.
E: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - \frac{25}{2} = 0$

4. Adott a $(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, a, 0), (0, 0, a)$ csúcspontokkal rendelkező tetraéder (a valós paraméter). Határozzuk meg a tetraéder köré írt gömb középpontjának a mértani helyét.

5. Határozzuk meg annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ és az $x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d' = 0$ gömbök metszete ez utóbbi egyik főköre legyen.

6. Adottak az $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0, (S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$ gömbök. Határozzuk meg a két gömb metszetének a középpontját és sugarát.
E: $O(1/2, 1, -1), r = 3\sqrt{3}/2$

7. Írjuk fel az $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$ gömb érintősíkjait az $x = y - 1 = z - 2$ egyenessel való metszéspontjaiban.

8. Írjuk fel az $A(3, -2, 5), B(-1, 6, -3), C(1, -4, 1)$ pontokon átmenő kör egyenletét.

9. Adott az $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 5 = 0$ gömb és a $(P) : 2x + y - 2z - 2 = 0$ sík.

a) Mutassuk ki, hogy a gömb metszete a síkkal egy valós kör és határozzuk meg a sugarát.

b) Határozzuk meg a gömb (P) síkkal párhuzamos érintő síkjainak az egyenletét.
E: $O(\frac{25}{9}, \frac{10}{9}, \frac{11}{9}); r = \frac{\sqrt{143}}{3}$; $b) 2x + y - 2z + 9 = 0; 2x + y - 2z - 15 = 0.$

10. Igazoljuk, hogy a $d : \begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ egyenesen át két érintő sík fektethető az $(S)x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$ gömbhöz. Melyek ezek?
E: $3x - 4y + 2z - 10 = 0; 2x - 3y + 4z - 10 = 0.$

II. Ellipszoid, egy-, kétpalástú hiperboloid, elliptikus, hiperbolikus paraboloid

11. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ egyenletű ellipszoid az $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ egyenessel való metszéspontjait.

12. Írjuk fel az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 0$ felülethez az M(2,3,1) pontban húzott érintő sík egyenletét. Mutassuk ki, hogy ez a sík érinti a felületet két egyenesben és határozzuk meg a két egyenes szögét.

13. Írjuk fel azon sík egyenletét, mely párhuzamos az $x - 3y + 2z - 1 = 0$ síkkal és érinti az
a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z$ felületet;
b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 3z$ felületet.

14. Írjuk fel az $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 9z$ elliptikus paraboloid érintő síkjainak egyenletét azokban a pontokban amelyekben a $d : x = y = z$ egyenes metszi a paraboloidot.

E: $z = 0; 4x + 2y - 3z - 36 = 0$

15. Határozzuk meg a $4x^2 - 9y^2 = 36z$ hiperbolikus paraboloid azon egyenes alkotóit melyek:
a) átmennek a $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$ ponton;
b) párhuzamosak a $3x + 2y - 4z = 0$ síkkal.

16. Írjuk fel az $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ felület azon egyenes alkotóit, amelyek párhuzamosak az $x + y + z = 0$ síkkal.

17. Határozzuk meg az $x^2 - y^2 = z$ nyeregfelület azon pontjainak a mértani helyét melyben a felülethez húzott normális az Oz tengellyel egy állandó szöget zár be.

18. Határozzuk meg azt az egypalástú hiperboloidot, melynek szimmetriatengelyei a koordinátatengelyek és az egyik alkotója: $d_1 : \begin{cases} 4x - z - 5 = 0 \\ 6y + 5z + 9 = 0 \end{cases}$. A kapott hiperboloid érinti a $6x - 3y + 2z - 6 = 0$ síkot?

19. Igazoljuk, hogy a $d : \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$ egyenes érinti az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ ellipszoidot és határozzuk meg az érintkezési pontot.

20. Írjuk fel azon síkok egyenletét, amelyek tartalmazzák a $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$ egyenest és érintik az $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$ egyenletű kétpalástú hiperboloidot.

21. Írjuk fel annak a másodendű felületnek az egyenletét, melynek ismerjük három alkotóját:

$$d_1 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases} \quad d_3 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}.$$

E: $xz + yz - 2y = 0$.

22. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a > b > c$, egyenletű ellipszoid körmetszeteit.

23. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ egyenletű ellipszoid körmetszeteit.

24. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = z$ elliptikus paraboloid körmetszteit!

25. Határozzuk meg az $x^2 + 2y^2 - 8z^2 - 4 = 0$ egypalástú hiperboloid azon körmetszeteit, amelyek átmennek az A(2,3,1) ponton.

26. Határozzuk meg az $x^2 + 2y^2 - 8z^2 + 4 = 0$ kétpalástú hiperboloid azon körmetszteit, amelyek átmennek az A(6,4,3) ponton.

27. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a > b > c > 0$, egyenletű ellipszoid azon M_0 pontját, amelyben az ellipszoidhoz szerkesztett érintősík a koordináta tengelyeken egyenlő hosszúságú szakaszokat határoz meg.

28. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a > b > c > 0$, egyenletű ellipszoid azon pontjait, amelyben az ellipszoidhoz szerkesztett normális metszi az Oz tengelyt.

29. Határozzuk meg $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = x$ felület azon pontjainak mértani helyét, amelyeken keresztül egymásra merőleges egyenes alkotók haladnak át!

30. Határozzuk meg a legkisebb távolságot az $x^2 + 3y^2 = 12z$ elliptikus paraboloid és az $x - y - 2z = 0$ sík közt.

31. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét a térből, amelyeknek az $F_1(3, 0, 0)$ és $F_2(-3, 0, 0)$ pontoktól vett távolságainak különbsége 4.