5. FELADATLAP **Görbék és felületek elmélete**

Felületek

1. Adott az $x = u+v$, $y = u-v$, $z = uv$ felület.
a) Határozzuk meg a felület implicit egyenletét!
b) Vizsgáljuk, hogy az M(4,2,3) és N(1,4,-2) pontok a felületen vannak-e!

2. Írjuk fel az alábbi felületek érintő síkjainak és normálisainak az egyenletét:
a)$x = ue^v, y = ue^{-v}, z = 4uv$ az $M(u = 2, v = 0)$ pontban;
b)$x = u^3 - 2v^2, y = uv^2, z = u^2v - u$ az $M(u = 1, v = -2)$ pontban;
c) $z = x^3 + y^3$ az $M(1, 2, 9)$ pontban;
d) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ az $M(x_0, y_0, z_0)$ pontban.

3. Igazoljuk, hogy az $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = 2t$ görbe rajta van a $z = \ln(x^2 + y^2)$ felületen és a görbéhez szerkesztett simulósík egybeesik a felület érintő síkjával a görbe bármely pontjában!

4. Igazoljuk, hogy az $xyz = a^3$ felület érintő síkja és a koordináta síkok által meghatározott tetraéder térfogata nem függ az érintkezési pont megválasztásától!

5. Legyen $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ egy felület. Igazoljuk, hogy a felület érintősíkjai átmennek egy rögzített ponton!

6. Igazoljuk, hogy az $r(u, v) = \left(u^3 \sin^3 v, u^3 \cos^3 v, (a^2 - u^2)^{3/2}\right)$ felülethez tetszőleges pontba szerkesztett érintősík metszete a koordinátatengelyekkel olyan szakaszokat határoz meg, amelyek négyzeteinek összege állandó! Mi az implicit egyenlete ennek a felületnek?

7. Igazoljuk, hogy az a pont, amelyben az $x^2+y^2+z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ felület normálisa metszi az xOy síkot ugyanakkora távolságra van az origótól, mint attól a ponttól, amelyben a normálist szerkesztettük a felülethez!

8. Határozzuk meg a következő felületek első alapformáját:
a) $\vec{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v$ (gömb);
b) $\vec{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v$ (ellipszoid);
c) $\vec{r}(u, v) = (av \cos u, bv \sin u, cv)$ (kúp);
d) $\vec{r}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v)$ (elliptikus henger);
e) $\vec{r}(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$ (tórusz);
f) $\vec{r}(u, v) = \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{uv+1}{v+u}, b \cdot \frac{v-u}{v+u}, c \cdot \frac{uv-1}{v+u}\right)$;
g) $\vec{r}(u, v) = (u, v, uv)$.

9. Adott az $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$ felület. Határozzuk meg:
a) az $u = \pm\frac{av^2}{2}$, $v = 1$ görbék által meghatározott görbevonalú háromszög kerületét, területét és szögeit;
b) az a állandót úgy, hogy a $u + v = 0$ és $u - v = 0$ görbék szöge 30° fok legyen;
c) az $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = \pi$ görbék által határolt felületrész területét!

10. Legyen $r(u,v)$ = ($u$cos v, $u$sin v, ku) felület. Határozzuk meg a v = 2ln$u$ görbe hosszúságát u = 1 és u = 3 közt!

11. Legyen egy felület első alapformája $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$. Határozzuk meg az $u = av, u = -av, v = 1$ görbék által határolt felületrész területét, kerületét és szögeit!
E: $K = a[\sqrt{2} + 1 + \ln(\sqrt{2} + 1)], A = 90°, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos C = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. Határozzuk meg azokat a görbéket az $(u \cos v, u \sin v, a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}))$ felületen, amely a v = áll. görbével állandó θ szöget zár be!

13. Határozzuk meg a $v = u + 1$ és $v = 3 - u$ görbék szögét az $\vec{r}(u, v) = u \cos v\vec{i} + u \sin v\vec{j} + u^2\vec{k}$ forgásfelületen!
E: $\cos B = \frac{2}{3}$.

14. Legyen c egy görbe, amelynek egyenlete $\vec{r} = \vec{r}(u)$, ahol u a természetes paraméter. Jelöljük $K_1(u)$, illetve $K_2(u)$-val a görbe görbületét ill. torzióját. Továbbá az S felület legyen az

$$\vec{r}_1(u, \varphi) = \vec{r}(u) + a\vec{e}_2(u) \cos \varphi + a\vec{e}_3(u) \sin \varphi$$

egyenlettel megadva, ahol $\vec{e}_2(u)$a c görbe főnormálisának egységvektora, $\vec{e}_3(u)$ a c binormálisának az egységvekora, a = állandó úgy, hogy $aK_1(u) < 1$ minden u esetén.
(i) Adjuk meg a felület első alapformáját!
(ii) Adjuk meg azokat a görbéket az (S) felületről, amelyek merőlegesek az u = áll. koordinátagörbére!
(iii) Határozzuk meg az $u = u_1$ és $u = u_2$ közti felületrész területét, ha tudjuk, hogy $\vec{r}(u, \varphi) = \vec{r}(u, \varphi + 2\pi)$, bármely φ esetén!

15. Határozzuk meg az $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = \frac{1}{2}u^2$ forgási paraboloid koordinátagörbéinek szögfelező görbéit!

16. Adott az $r(u,v) = (au\cos v, au\sin v, bv)$ csavarfelület.

a) Igazoljuk, hogy a koordinátagörbéi merőlegesek egymásra!

b) Határozzuk meg az $u = 0,\ u = 1, v = 0, v = 1$ görbék által határolt felületrész területét!

17. Keressük meg azokat a görbéket a gömbről, amelyek ugyanazt a szöget zárják be a meridiánkörökkel!

18. Határozzuk meg a sík első és második alapformáját!

19. Igazoljuk, hogy

a) a gömb esetén az első és második alapforma megfelelő együtthatói arányosak és ez az arány állandó.

b) ha egy $z = f(x,y)$ felület esetén az első és második alapforma együtthatóinak aránya állandó, akkor a felület vagy gömb vagy sík!

20. Határozzuk meg az $r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ forgásfelület első alapformáját!

21. Számítsuk ki a következő felületek második fundamentális formáját!

a) $\vec{r}(u,v) = (a\cos u\cos v, a\sin u\cos v, c\sin v)$ (forgási ellipszoid);

b) $\vec{r}(u,v) = (a\cosh u\cos v, a\cosh u\sin v, c\sinh u)$ (egypalástú forgási hiperboloid);

c) $\vec{r}(u,v) = (a\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, c\cosh u)$ (kétpalástú forgási hiperboloid);

d) $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$ (forgási paraboloid);

e) $\vec{r} = (R\cos v, R\sin v, u)$ (körhenger);

f) $\vec{r}(u,v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$ (tórusz);

ahol cosh x=$\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$,sinh x=$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

22. Adott az $xyz = a^3$ felület.

a) Számítsuk ki az második alapformáját!

b) Határozzuk meg a felület umbilikális pontjait!

23. Határozzuk meg a $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ paraboloid normál görbületét a (0,0) pontban, a $(dx : dy)$ irány mentén!

24. Határozzuk meg a $z = axy$ paraboloid főgörbületeit, közép és összgörbületét a (0,0,0) pontban!

25. Határozzuk meg a teljes és középgörbületét az alábbi felületnek:

$$\begin{cases} x(u,v) = 2(u+v)(u^2+v^2-4uv) + 3(u+v) \\ y(u,v) = 2(u+v)(u^2+v^2-4uv) + 3(u-v) \\ z(u,v) = 12uv. \end{cases}$$

26. Határozzuk meg az $r(u,v) = (u - v, u + v, \frac{1}{2}uv)$ felület főirányait az $u = 1, v = 1$ pontban!

27. Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 - 2az = 0$ elliptikus paraboloid elliptikus felület!

28. Igazoljuk, hogy az $x^2 - y^2 + 2az = 0$ hiperbolikus paraboloid hiperbolikus felület!

29. Igazoljuk, hogy a $z = a - \sqrt{a^2 - y^2}$ felület parabolikus!

30. Határozzuk meg az alábbi felületek görbületi vonalait, asszimptotikus vonalait, a teljes és összgörbületét!

a) $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, f(u))$ (Oz tengelyű forgásfelület);

b) $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$ (csavarfelület);

c) $r(u,v) = (\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u + \ln tg\frac{u}{2})$ (pszeudószféra);

d) $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u + v)$;

31. Adott az $r(u,v) = (\cos v - (u+v)\sin v, \sin v + (u+v)\cos v, u + 2v)$ felület. Számítsuk ki az aszimptotikus vonalakhoz rendelt nomálmetszet görbületét!

32. Igazoljuk, hogy a $z = \ln\cos x - \ln\cos y$ felület minimálfelület!

33. Határozzuk meg azon forgásfelületeket, amelyek

a) minimálfelületek;

b) teljes görbületük pozitív állandó;

c) teljes görbületük negatív állandó.

34. Adott az $y = x^2, z = 0$ parabola. Igazoljuk, hogy a parabola Ox tengely körüli forgatásával nyert felület esetén a főgörbületi sugarak aránya állandó!

35. Ţiţeica felületnek nevezünk egy olyan felületet, amely esetén $\frac{K}{d^4}$=állandó a felület minden pontjában. K a felület teljes görbületét jelöli a felület egy M pontjában és d pedig az origó távolságát az M pontba szerkesztett érintő síktól. Igazoljuk, hogy az alábbi felületek mind Ţiţeica felületek!
a) $xyz = a^3$;
b) $(x^2 + y^2)z = a^3$;
c)$(x^2 - y^2)z = a^3$.

36. Adott az $r(u, v) = (u \cos v + \sin^2 v, u \sin v - \frac{1}{2} \sin 2v - v, \varphi(u, v))$. Határozzuk meg a φ függvényt úgy, hogy a felület koordinátagörbéi legyenek egymásra merőlegesek!

37. Határozzuk meg a $z = f(x, y)$ felület asszimptotikus vonalait! Alkalmazás:
a) $z = a\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$;
b) $z = x^2 y$.

38. Határozzuk meg az alábbi felületek asszimptotikus vonalait:
a) $r(u, v) = (u^2 + v, u^3 + uv, u^4 + \frac{2u^2v}{3})$;
b) $r(u, v) = \left(a(1 + ctgu) \cos v, a(1 + \cos u), \frac{a \cos u}{\sin v}\right)$.