1. Feladatlap - VEKTORALGEBRA

Műveletek vektorokkal

1. Adott egy $ABCD$ tetraéder. Határozzuk meg az alábbi összegeket:
   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;
   b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;
   c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

2. Adott az $ABCD$ tetraéder. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$. Igaz ez az összefüggés bármely négy pontra a térből?

3. Legyen O az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja. Határozzuk meg az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ és $\overrightarrow{OD}$ vektorokat az $\overrightarrow{OE} = \vec{p}$ és $\overrightarrow{OF} = \vec{q}$ vektorok függvényében!

4. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög és M a BC oldal felezőpontja. Mutassuk ki, hogy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

5. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög és M egy pont a BC egyenesen úgy, hogy $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC}$, ahol $k \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$.

6. Legyenek E és F az $ABCD$ négyszög átlóinak felezőpontjai. Igazoljuk, hogy
$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

7. Legyenek E és F az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalainak a felezőpontjai. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$, majd innen vezessük a trapéz középvonalának tételét!

8. Adott egy $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ szabályos hatszög. Igazoljuk, hogy
$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_4} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = 3\overrightarrow{C_1C_4}!$$

9. Egy ABC háromszögben megszerkesztjük az AD szögfelezőt és az AE magasságot. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ vektorok valamint az ABC háromszög $|BC| = a$,$|AC| = b$, $|AB| = c$ oldalainak függvényében.

10. Adott egy $ABCD$ trapéz, amelynek az AB nagyalapja k-szor nagyobb ($k > 1$) mint a CD kisalap. Legyenek M és N az alapok felezőpontjai. Bontsuk fel az $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorok segítségével.

11. Legyen $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ két paralelogramma a térben és A_3, B_3, C_3, D_3 az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 és D_1D_2 szakaszok felezőpontjai. Mutassuk ki, hogy $A_3B_3C_3D_3$ paralelogramma!

12. Legyen O, A, B, C, D öt pont a térben. Mutassuk ki, hogy $ABCD$ akkor és csakis akkor paralelogramma, ha $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

13. Egy O középpontú körben az AB és CD egymásra merőleges húrok az M pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$.

14. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög és G az ABC háromszög súlypontja. Tekintve egy tetszőleges O pontot a térben mutassuk ki, hogy
   a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$;
   b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

15. Legyen $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ két nem azonos síkban fekvő háromszög és G_1, G_2 a súlypontjaik. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2}$.

16. Legyen ABC egy háromszög, H a magasságpont, O a háromszög köré írt kör özéppontja és A' az A-nak átmérősen ellentett pontja. Mutassuk ki, hogy

   a) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'}$;
   b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$;
   c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$;
   d) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$;
   e) a H, G, O pontok kollineárisak (Euler féle egyenes) és $2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HG}$.

17. Legyen $A_1A_2...A_n$ az O középpontú körbe írt szabályos n oldalú sokszög. Igazoljuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$.

18. (Euler kör) Az ABC háromszögben legyen O a háromszög köréírt kör középpontja, H a magasságok metszéspontja és A', B', C', A'', B'', C'', F a BC, CA, AB, HA, HB, HC és OH szakaszok felezőpontjai. Mutassuk ki, hogy az A', B', C', A'', B'', C'' pontok az F középpontú körön helyezkednek el. (Vektoriális módszerrel!)

19. Legyen O az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja. Az OAB, OBC, OCD és OAD háromszögek súlypontját rendre G, H, I illetve K jelöli. Igazoljuk, hogy $GHIK$ paralelogramma!

20. Adott az $ABCD$ paralelogramma, valamint a P, Q, R és S pontok, amelyeket az $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{DS} = k\overrightarrow{DA}$ egyenlőségek határoznak meg ($k \in \mathbb{R}^*$).

    a) Készítsünk rajzot $k = -1$ esetén!

    b) Igazoljuk, hogy $PQRS$ paralelogramma ($\forall k \in \mathbb{R}^*$)!

21. Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen G a BCD háromszög súlypontja és H az ACD háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy az $ABGH$ négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha G egybeesik az ACD háromszög köré írt kör középpontjával.

22. Az ABC háromszög síkjában adottak a D és E pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Igazoljuk, hogy az A, D és E pontok egy egyenesen helyezkednek el!

23. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B, C, D, E, F egy hatszög egymś utáni oldalfelezési pontjai, akkor az AB, CD és EF szakaszokkal háromszög szerkeszthető!

24. Igazoljuk, hogy egy háromszög oldalfelezőivel háromszög szerkeszthető!

25. Egy ABC háromszög szögfelezőivel akkor és csakis akkor szerkeszthető háromszög, ha az ABC háromszög egyenlő oldalú!

26. Adott két tetszőleges háromszög: ABC és $A_1B_1C_1$. Legyen $\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BB_2} = \overrightarrow{B_1C_1}$ és $\overrightarrow{CC_2} = \overrightarrow{C_1A_1}$. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és $A_2B_2C_2$ háromszögnek közös súlypontjuk van!

27. Az ABC háromszög oldalain vegyük fel az $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ és $C_1 \in (AB)$ pontokat, úgy hogy ezek a pontok a szakaszt ugyanolyan arányban osszák. Legyen $\{A_2\} = BB_1 \cap CC_1$, $\{B_2\} = CC_1 \cap AA_1$ és $\{C_2\} = AA_1 \cap BB_1$. Mutassuk ki, hogy:

    a) Az ABC és $A_2B_2C_2$ háromszögek súlypontja egybeesik.
    b) Az $\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{BB_2}$, $\overrightarrow{CC_2}$ lehetnek egy háromszög oldalai.

28. Adott az $ABCDE$ ötszög és $P \in [DE]$. Jelöljük rendre G_1,G_2,G_3,G_4-el az ADE, APB, ABC, APC háromszögek súlypontjait. Mutassuk ki, hogy $G_1G_2G_3G_4$ paralelogramma akkor és csak akkor ha P a $[DE]$ szakasz felezőpontja.

29. Legyen $ABCD$ egy tetszőlegesen rögzített négyszög a síkban és M egy változó pont. Mutassuk ki, hogy az $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ vektor áthalad egy rögzített ponton!

30. Az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek köré írt körök középpontjai legyenek O_1 és O_2, az ortocentrumok pedig H_1 és H_2. Igazoljuk, hogy az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögeknek akkor és csakis akkor ugyanaz a súlypontjuk, ha $\overrightarrow{H_1H_2} + 2\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0}$. (Országos olimpiász, 2011, IX. osztály)

Egyenes vektoriális egyenlete

31. Legyen O, A, B három nem kollineáris pont és C egy tetszőleges pont a térben. Bevezetve az $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ jelöléseket, mutassuk ki, hogy annak szükséges és elégéges feltétele, hogy:

    i) $C \in (OAB) \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R}$, úgy, hogy $\overrightarrow{c} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$;

    ii) $C \in AB \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R},\ m + n = 1$ úgy, hogy $\overrightarrow{c} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$ (az AB egyenes vektoriális egyenlete);

    iii) $C \in [AB] \Leftrightarrow \exists m, n \in [0, 1],\ m + n = 1$, úgy, hogy $\overrightarrow{c} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$ (az [AB] szakasz vektoriális egyenlete).

32. Legyen O, A, B, C négy nem kollineáris pont és D egy pont a térben. úgy, hogy az A, B, C, D pontok nem koplanárisak. Bevezetve az $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{d}$ jelöléseket, mutassuk ki, hogy

    i) $D \in (ABC) \Leftrightarrow \exists m, n, p \in \mathbb{R}$, $m + n + p = 1$ úgy, hogy $\overrightarrow{d} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} + p\overrightarrow{c}$;

    ii) $D \in int(ABC_{\triangle}) \Leftrightarrow \exists m, n, p \in (0, 1),\ m + n + p = 1$ úgy, hogy $\overrightarrow{d} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} + p\overrightarrow{c}$. Ebben az esetben
    $$m = \frac{T_{BCD}}{T_{ABC}},\ n = \frac{T_{ACD}}{T_{ABC}},\ p = \frac{T_{ABD}}{T_{ABC}}.$$

33. Legyen O, A, B, C, D öt pont a térben úgy, hogy az A, B, C, D pontok nem koplanárisak. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy E pont benne legyen az $ABCD$ tetraéder belsejében az, hogy $\vec{e} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} + q\vec{d}$ alakú legyen, ahol $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{e}$ és $m, n, p, q \in (0, 1)$, $m + n + p + q = 1$. Ekkor
    $$m = \frac{V_{EBCD}}{V_{ABCD}},\ n = \frac{V_{EACD}}{V_{ABCD}},\ p = \frac{V_{EABD}}{V_{ABCD}}, q = \frac{V_{EABC}}{V_{ABCD}}.$$

34. Legyen $A_1A_2A_3A_4$ egy tetraéder és O egy tetszőleges pont a térben.

    a) Igazoljuk, hogy a szemközti élek felezőpontjai által meghatározott egyenesek összefutóak egy G pontban!

    b) Igazoljuk, hogy a csúcsokat a szemközti oldallapok súlypontjaival összekötő egyenesek szintén a G pontban futnak össze!

    c) Milyen arányban osztja a G pont a csúcsokat a szemközti oldallapok súlypontjaival összekötő szakaszokat?

    d) Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_4} = \overrightarrow{0}$!

    e) Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} = 4\overrightarrow{OG}$!

35. Egy ABC háromszög AB és AC oldalain felvesszük a C' és B' pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{C'B}$, $\overrightarrow{AB'} = \mu\overrightarrow{B'C}$. A BB' és CC' egyenesek metszik egymást egy M pontban. Legyen O egy tetszőleges pont a térben és bevezetjük a következő jelöléseket: $\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$. Ekkor igazoljuk, hogy $\overrightarrow{r}_M = \dfrac{\overrightarrow{r}_A + \lambda\overrightarrow{r}_B + \mu\overrightarrow{r}_C}{1 + \lambda + \mu}$.

36. Felhasználva a 35. feladat jelöléseit igazoljuk, hogy

    a) $\overrightarrow{r_G} = \dfrac{\overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C}{3}$, ahol G a háromszög súlypontja;

    b) $\overrightarrow{r_I} = \dfrac{a\overrightarrow{r}_A + b\overrightarrow{r}_B + c\overrightarrow{r}_C}{a + b + c}$, ahol I a háromszögbe írt kör középpontja;

    c) $\overrightarrow{r_H} = \dfrac{tgA\overrightarrow{r}_A + tgB\overrightarrow{r}_B + tgC\overrightarrow{r}_C}{tgA + tgB + tgC}$, ahol H a háromszög magasságpontja;

    d) $\overrightarrow{r_O} = \dfrac{\sin 2A\overrightarrow{r}_A + \sin 2B\overrightarrow{r}_B + \sin 2C\overrightarrow{r}_C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$, O a háromszög köré írt kör középpontja.

37. (Pappusz tétele) Legyen d és d' két metsző egyenes és $A, B, C \in d$, $A', B', C' \in d'$ tetszőleges pontok. Feltételezve, hogy létznek az $\{M\} = AB' \cap A'B$, $\{N\} = AC' \cap A'C$ és $\{P\} = BC' \cap B'C$ metszéspontok, mutassuk ki, hogy az M, N, P pontok kollineárisak.

38. (Gauss-Newton tétele) Legyen d_i, $i = \overline{1,4}$ négy egyenes a síkban úgy, hogy bármelyik három közülük nem metszi egymást egy pontban. Ha A_{ik}-val jelöljük a d_i és d_k egyenesek metszéspontjait, és M, N, P-vel az $A_{12}A_{34}$, $A_{14}A_{23}$, $A_{13}A_{24}$ szakaszok felezőpontjait, akkor mutassuk ki, hogy az M, N, P pontok kollineárisak. Másképp fogalmazva a feladat: Az $ABCD$ négyszög oldalait meghosszabbítva legyen E az AB és CD, míg F a BC és AD egyenesek metszéspontja. Igazoljuk, hogy az AC, BD, EF szakaszok felezőpontjai kollineárisak.

39. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = 4$, $BC = 2$ és $BD = 3$. Legyen G az ABD háromszög súlypontja, I a BCD háromszögbe írt kör középpontjá és M a BC oldal C-hez közelebbi harmadolópontja. Bizonyítsuk be, hogy G, I, M kollineáris pontok!

40. Az $ABCD$ paraleolgramma oldalain felvesszük az $E \in [BC]$ és $F \in [CD]$ pontokat. Az $ABEFD$ ötszög oldalainak felezőpontjai K, L, M, N és O ($K \in [AB]$, $L \in [BE]$, $M \in [EF]$, $N \in [FD]$ és $O \in [DA]$). Bizonyítsuk be, hogy AM, OL és KN összefutó egyenesek!

41. Legyen $ABCD$ egy paralelogramma és legyenek az $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (DC)$ illetve $Q \in (AD)$ pontok az oldalakon úgy, hogy $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AC}$. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{DB}$. (Megyei olimpiász, 2011, IX. osztály)

42. Legyen $ABCD$ egy paralelogramma és O a paralelogramma egy belső pontja. Az O ponton keresztül párhuzamosokat húzunk a paralelogramma oldalaival. Az AB oldallal húzott párhuzamos egyenes metszi az AB illetve CD oldalakat E illetve F pontban valamint az AD oldallal húzott párhuzamos metszi az AD ill. BC oldalakat G illetve H pontokban. Ha tudjuk hogy $\frac{AE}{AB} = k$, $\frac{AG}{AD} = m$, $k + m \neq 1$, $k, m \in (0, 1)$, akkor igazoljuk, hogy az AC, EH és GF egyenesek összefutóak!

Vektorok szorzatai

43. Adottak az $\overrightarrow{OA} = (4, -2, -4)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 4, 3)$ vektorok. Határozzuk meg az $OACB$ paralelogramma átlóinak hosszát és közrezárt szögüket!

44. Adottak az $\overrightarrow{AB}(1, 2, -2)$, $\overrightarrow{BC}(2, 1, 2)$, $\overrightarrow{CD}(-1, -2, 2)$ vektorok. Igazoljuk, hogy $ABCD$ négyzet!

45. Határozzuk meg az $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ és $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ vektorokra épített paralelogramma átlóinak hosszát, ahol az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok hossza 1 és a közrezárt szögük mértéke $60°$.

46. Határozzuk meg az $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ és $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ vektorok szögét, ahol az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ egysgvektorok és a közrezárt szögük mértéke $120°$.

47. Az $ABCD$ négyzet A csúcspontját összekötjük a $[BC]$ oldal M felezőpontjával és a $[DC]$ oldal N felezőpontjával. Számítsuk ki az MAN szög mértékét (vektoriálisan!).

48. Legyen $ABCDA'B'C'D'$ egy kocka és N a $CDD'C'$lap középpontja, M pedig az $A'B'C'D'$ lap középpontja. Számítsuk ki:

    a) az AC és AD' hajlásszögének mértékét;

    b) az AN és AM hajlásszögének mértékét.

49. Legyen ABC egy háromszög és O egy pont a térben. Mutassuk ki, hogy

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

50. Legyen ABC egy derékszögű háromszög és az AB átfogó hossza c. Számítsuk ki az $S = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. összeget:

51. Legyen ABC egy háromszög és M a BC oldal felezőpontja. Mutassuk ki, hogy

    a) $4\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

    b) $4AM^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$.

52. Legyen $ABCD$ egy téglalap és M egy pont a térben. Mutassuk ki, hogy:

    a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$;

    b) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

53. Adott a $\overrightarrow{h} = (1-\lambda)\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ merőlegesen a $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ vektorra. Mutassuk ki, hogy $a \perp b$ akkor és csakis akkor, ha $\|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| = \left\|\overrightarrow{h}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right\|$.

54. Mutassuk ki vektoriálisan, hogy egy háromszög magasságai egy pontban metszik egymást!

55. Az $ABCD$ tetraéderben $AB \perp CD$, $AD \perp BC$. Mutassuk ki, hogy:

a) $AC \perp BD$;

b) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$;

c) a tetraéder magasságai egy pontban metszik egymást.

56. Legyen ABC egy háromszög és D, $E \in AB$, F, $G \in BC$, H, $I \in AC$ úgy, hogy a megfelelő oldalakat három egyenlő részre osszák. Az ED, FG, HI szakaszokra mint oldalakra megszerkesztjük az EDR, FGS, HTI egyenlő oldalú háromszögeket. Mutassuk ki, hogy az RST háromszög egyenlő oldalú.

57. Határozzuk meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számot úgy, hogy a $\vec{p} = \vec{i} + 2\vec{j} + \lambda\vec{k}$ és $\vec{q} = 3\vec{i} + \vec{j}$ vektorok által közrezárt szög 45°-os legyen!

58. Határozzuk meg azt a $\vec{p}$ vektort, amely merőleges az $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ és $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ vektorokra, hossza 14 és az Oy tengellyel tompaszöget zár be!

59. Egy $\vec{p}$ vektor kollineáris az $\vec{a}(6, -8, -15/2)$ vektorral és tompaszöget zár be az Oz tengellyel. Határozzuk meg a $\vec{p}$ komponenseit, ha $||\vec{p}|| = 50$.

60. Adottak az $\vec{a}(3, -1, -2)$ és $\vec{b}(1, 2, -1)$ vektorok. Számítsuk ki az alábbi vektorokat:

$$\vec{a} \times \vec{b}, (2\vec{a} + b) \times \vec{b}, (2\vec{a} + b) \times (2\vec{a} - \vec{b}).$$

61. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}(6, 0, 2)$ és $\overrightarrow{AC}(1.5, 2, 1)$ vektorokra épített paralelogramma párhuzamos oldalai közti távolságokat!

62. Adottak az $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ és $C(5, 2, 6)$ pontok. Határozzuk meg az ABC háromszög területét!

63. Adottak az $\vec{a}(2, -3, 1)$, $\vec{b}(-3, 1, 2)$ és $\vec{c}(1, 2, 3)$ vektorok. Határozzuk meg az $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ és $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ vektorokat. Milyen következtetést tudunk levonni a vektoriális szorzat asszociatívításával kapcsolatosan?

64. Adottak az $\overrightarrow{a}(1, 0, 3)$és a $\overrightarrow{b}(2, 1, -1)$ vektorok. Adjunk meg egy vektort, amely merőleges az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorokra és hosszúsága 2.

65. Legyen az $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$ kifejezés. Számítsuk ki az értékét és értelmezzük mértanilag.

66. Mikor áll fenn az $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ egyenlőség?

67. (*Gibbs-képlet*) Mutassuk ki, hogy:

a) $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$;

b) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$.

68. Tekintsük a $VABC$ szabályos háromoldalú gúlát, melyben $AB = BC = AC = a$ és $VA = VB = VC = b$ $(b > a)$. Mutassuk ki, hogy $(\overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{VB}) \times \overrightarrow{VC} = \frac{2b^2 - a^2}{2}\overrightarrow{AB}$.

69. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

a) $\mathrm{tg}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}$;

b) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2$ (Lagrange-féle azonosság).

70. Legyen $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ három nem kollineáris vektor. Ha $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$, akkor igazoljuk, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen az ABC háromszög az, hogy: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$. Innen vezessük le a szinusz tételt.

71. (Sündisznó tétel) Legyen az $[ABCD]$ tetraéder. Igazoljuk, hogy azon kifele irányuló vektorok összege, amelyek merőlegesek a tetraéder lapjaira, és nagyságuk rendre a megfelelő lap területével egyenlő, a zérus vektor.

72. Adott három vektor: $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{OC}$. Igazoljuk, hogy az $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{r_3} + \overrightarrow{r_3} \times \overrightarrow{r_1}$ vektor merőleges az (ABC) síkra.

73. Igazoljuk, hogy az $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$ $C(-1, 2, 1)$ és $D(2, 1, 3)$ pontok egy síkban vannak!

74. Határozzuk meg azon tertraéder térfogatát, amelynek csúcsai $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ és $D(4, 1, 3)$!

75. Egy $ABCD$ tetraéder esetén $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Határozzuk meg a D csúcs koordinátáit, tudva, hogy a tetraéder térfogata 5 és a D csúcs az Oy tengelyen helyezkedik el.

76. Adottak az $\vec{a}(8, 4, 1)$, $\vec{b}(2, 2, 1)$ és $\vec{c}(1, 1, 1)$ vektorok. Határozzuk meg azt az egységnyi hosszúságú $\vec{d}$ vektort, amelyik az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal ugyanakkora szöget zár be, merőleges a $\vec{c}$ vektorra, valamint az $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ és $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ rendszerekről tudjuk, hogy azonos irányításúak (mindkettő jobb- vagy mindkettő balsodrású).

77. Mutassuk ki, hogy ha $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, akkor az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektorok koplanárisak.

78. Mutassuk ki, hogy ha $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}) = 0$ akkor $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ koplanárisak.

79. Ellenőrizzük az alábbi összefüggéseket:
a) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}) - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})$
b) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})\overrightarrow{c} - (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{d}$.

80. Az ABC háromszögben legyenek A', B', C', a magasságok talppontjai. Bevezetve a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{h}_a, \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{h}_b, \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{h}_c$ jelöléseket mutassuk ki, hogy:
a) $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{h}_a \times \overrightarrow{a}$;
b) $\overrightarrow{h}_a = \frac{1}{a^2}\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$;
c) $a^2\overrightarrow{h}_a + b^2\overrightarrow{h}_b + c^2\overrightarrow{h}_c = \overrightarrow{0}$.

81. Adottak az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ nem koplanáris vektorok. Mutassuk ki, hogy

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = 0.$$

82. Adott az A, B, C, D pontok egy O középpontú körön. Ha létezik $x, y \in \mathbb{R}^*$ pontok amelyekre

$$||x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}|| = ||x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}|| = ||x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OD}|| = ||x\overrightarrow{OD} + y\overrightarrow{OA}||,$$

akkor mutassuk ki, hogy $ABCD$ négyzet.

83. Azt mondjuk, hogy A halmaz rendelkezik az (S) tulajdonsággal ha $(\forall)\overrightarrow{u} \in A$ esetén léteznek az $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in A$ vektorok, amelyekre $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{w}$ és $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

a) Mutassuk ki, hogy minden $n \geq 6$ esetén létezik n nem nulla vektor, amelyek rendelkeznek (S) tulajdonsággal.

b) Mutassuk ki, hogy minden (S) tulajdonságú halmaznak van legalább 6 eleme.

Ajánlott könyvészet:

- Andrica D., Varga Cs., Văcăreţu D., *Teme şi probleme alese de geometrie*, Editura Plus, 2002.
- Groze, V., Radó, F., Orbán, B., Vasiu, A., *Culegere de probleme de geometrie*, Litografia UBB, Cluj-Napoca, 1979.
- Simionescu Gh., *Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii ale calculului vectorial în geometrie*, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1982.
- Olosz F., *Vektorok alkalmazása a geometriában*, Appendix Kiadó, Marosvásárhely, 2003.