Síkok és egyenesek **2. FELADATLAP**

1. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $M_0(1,2,-1)$ ponton és

   a) az $M(3,4,0)$ ponton;

   b) párhuzamos a $\vec{d}(2,-1,5)$ vektorral;

   c) merőleges a $2x-y+3z-10=0$ síkra;

   d) párhuzamos az e: $\begin{cases} 2x-y+3z+1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$ egyenessel;

   e) párhuzamos az Ox tengellyel.

2. Határozzuk meg az $A(1,2,3)$, $B(-2,1,4)$ pontokon átmenő egyenesnek a koordinátasíkokkal való metszéspontjait. E:$(0,\frac{5}{3},\frac{10}{3}),(-5,0,5),(10,5,0)$.

3. Adottak az $u_1 : x+4y+2z-1=0, 2x-y-2z+4=0$, $u_2 : \frac{x-2}{l}=\frac{y+4}{m}=\frac{z-2}{n}$ egyenesek. Határozzuk meg:

   a)Annak feltételét, hogy az u_1 és u_2 metsző egyenesek legyenek.

   b)Az egyenesek merőlegességének feltételét.

   c) Az a) és b) feltételek mellett határozzuk meg a metszéspont koordinátáit.

   d) A $P_2(2,-4,2) \in u_2$ pont u_1-re vonatkoztatott szimmetrikusának koordinátáit.

4. Az $Oxyz$ derékszögű koordináta-rendszerhez viszonyítva adottak az $A(1,2,3), B(3,4,2)$ és $C(2,0,1)$ pontok. Igazoljuk, hogy ezek a pontok lehetnek egy kocka csúcspontjai és határozzuk meg a többi csúcspont koordinátáit.

   E: $D(4,2,0), E_1(2,3,-2), F_1(1,5,0), G_1(-1,3,1), H_1(0,1,-1)$,
   $E_2(6,1,2), F_2(5,3,4), G_2(3,1,5), H_2(4,-1,3)$.

5. Igazoljuk, hogy a térben elhelyezkedő $Pi(x_i,y_i,z_i)$, $(i=1,2,3)$ pontok akkor és csak akkor kollineárisok, ha $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.

6. Igazoljuk, hogy két párhuzamos egyenes közötti d távolság kiszámítható a $d=\frac{||\vec{r}\times\vec{u}||}{||\vec{u}||}$ összefüggés segítségével, ahol $\vec{r}$ e két egyenes egy-egy pontját összekapcsoló tetszőleges vektor, $\vec{u}$ pedig az adott egyenesekkel párhuzamos vektor. Alkalmazás: a két párhuzamos egyenes legyen $u_1 : \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ és $u_2 : \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$. E: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

7. Legyenek $A(-1,1,1), B(2,3,-1), C(5,2,0)$ az AB alapú egyenlő szárú trapéz csúcspontjai. Határozzuk meg a D, negyedik csúcspont koordinátáit.

   E: $D(\frac{4}{17},-\frac{20}{17},\frac{54}{17})$.

8. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét különböző formákban, amely átmegy az $A(2,3,1)$, $B(-4,2,-5)$, $C(0,1,0)$ pontokon. E: $-11x+6y+10z-6=0$.

9. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $M_0(1,-2,3)$ ponton és párhuzamos a $\overrightarrow{v}_1(1,-1,0)$, $\overrightarrow{v}_2(-3,2,4)$ vektorokkal. E: $4x+4y+z+1=0$

10. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az Ox, Oy, Oz koordinátatengelyeket az A, B, C pontokban metszi, ahol $A(-1,0,0)B(0,3,0), C(0,0,-2)$.

    E: $6x-2y+3z+6=0$.

11. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(7,-5,2)$ ponton és a koordinátatengelyeken ugyanakkora pozitív szakaszokat határoz meg. E: $x+y+z-4=0$.

12. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(2,-1,3)$ ponton és párhuzamos a $2x+4y-z+5=0$ síkkal. E: $2x+4y-z+3=0$

13. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely

    a) átmegy az $M_1(1,-1,3)$ és $M_2(1,2,4)$ pontokon és merőleges a $2x-3y+z+1=0$ síkra;

    b) átmegy a $P(-1,2,6)$ ponton és tartalmazza a d:$\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$ egyenest;

    c) átmegy az A(1,1,-2) ponton és merőleges a d:$\begin{cases} 2x+3z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ egyenesre.

    E: a) $6x+2y-6z+14=0; b)\ 25x+2y+10z-39=0; c)\ 3x+y-2z-8=0$.

14. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_1: 2x+y-z-2=0$, $P_2: x-3y+z+1=0$, $P_3: x+y+z-3=0$ síkok metszéspontján és párhuzamos a $P_4: x+y+2z=0$ síkkal.

    E: $x+y+2z-4=0$.

15. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $A(2,-1,3)$ és $B(4,5,-3)$ pontok által meghatározott szakasz felezőmerőleges síkja. E: $x+3y-3z-9=0$.

16. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza a d:$\begin{cases} 2x+y-z-2=0 \\ x-3y+z+1=0 \end{cases}$ egyenest és

    a) átmegy az origón;

    b) párhuzamos az Oy tengellyel. E: a)$4x-5y+z=0$; b) $7x-2z-5=0$.

17. Igazoljuk, hogy az a paralelepipedon, amelynek nempárhuzamos oldallapjai a $2x+y-2z+6=0$, $2x-2y+z+8=0$ és $x+2y+2z+10=0$ síkokban vannak, derékszögű.

18. Az $Oxyz$ derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(\alpha,0,1), B(-\alpha,0,1)$, $C(0,\beta,-1)$, $D(0,-\beta,-1)$ pontok.

    a)Írjuk fel az $ABCD$ tetraéder lapjainak és magasságainak egyenleteit.

    b) Határozzuk meg annak feltételét, hogy ez a tetraéder szabályos legyen.

    c) Ezen utóbbi esetben határozzuk meg egy lap területét. E: b)$\alpha,\beta=\pm\sqrt{2}$, c) $2\sqrt{3}$.

19. Adottak a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pont és a $d_i: \frac{x-x_i}{l_i}=\frac{y-y_i}{m_i}=\frac{z-z_i}{n_i}$, $(i=1,2)$ egyenesek. Határozzuk meg az adott egyenesekre támaszkodó és adott ponton áthaladó egyenes egyenleteit. Alkalmazás: adottak a $P_0(1,1,1)$ pont és a $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{3}$, illetve $d_2: 3x-2y=0, x-2z=0$ egyenesek.

    E: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$.

20. Legyen π a $d_1 : \frac{x-5}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ és $d_2 : \frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$egyenesek által meghatározott sík, π' pedig az origón és a $P'(2,0,-1)$ pontokon áthaladó $3x - y - z + 4 = 0$ síkra merőleges sík.

a) Határozzuk meg a π és π' síkok hajlásszögét.

b) Igazoljuk, hogy a P' pont és a d_1, d_2 egyenesek metszéspontjából a π' síkra bocsátott merőleges által meghatározott π'' sík átmegy az origón.

E: a) $60°$; b) $\pi'' : x - 5y + 2z = 0$.

21. Határozzuk meg annak feltételét, hogy az $u_i : \frac{x-x_i}{l_i} = \frac{y-y_i}{m_i} = \frac{z-z_i}{n_i}$, $(i = 1,2,3)$ egyenesek párhuzamosok legyenek ugyanazzal a síkkal.

22. Igazoljuk, hogy egy tetraéder oldaléleinek felezőpontjain áthaladó és a szemközti élekre merőleges síkok egy pontban találkoznak.

23. Írjuk fel azon u egyenes egyenleteit, amely áthalad a $\pi : 3x + 2y + z = 0$ síknak a $d : x - 2y + z + 2 = 0, x + y - z - 3 = 0$ egyenessel való metszéspontját, a π síkban található és merőleges a d egyenesre. E: $\frac{x-3/5}{1} = \frac{y-1/5}{-2} = \frac{z+11/5}{1}$.

24. Adottak a $P(0,0,1)$, $Q(1,2,0)$ pontok és az $u : 2x - y - z - 3 = 0, 3x - 2y - 5 = 0$ egyenes.

a) Határozzuk meg a Q ponton és a P-ből u-ra bocsátott merőlegesen áthaladó π sík egyenletét.

b) Határozzuk meg az u és PQ egyenesek közös merőlegesének egyenleteit, valamint a két egyenes közötti minimális távolságot.

25. Adottak a $d_1 : x + y - 2 = 0, z + 2 = 0$, $d_2 : x + z - 1 = 0, y - 3 = 0$ egyenesek. Az u_1 egyenes áthalad a $P_1(1,1,1)$ ponton és merőleges a d_1 egyenesre, míg az u_2 egyenes a $P_2(1,0,0)$ ponton halad át és párhuzamos d_2-vel. Határozzuk meg:

a) Az u_1 és u_2 egyenesek közös merőlegesének egyenleteit.

b) Az u_1 és u_2 egyenesek közötti távolságot. a) $x = 1, z = 0$; b) $d = 1$.

26. Adott a $\pi : 6x - 7y - 4z - 9 = 0$ sík valamint a $d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ és $d_2 : \frac{x+7}{9} = \frac{y+10}{11} = \frac{z+9}{8}$ egyenesek.

a) Határozzuk meg a d_1 és d_2 egyenesek d_3 közös merőlegesének egyenleteit és a két egyenes közötti távolságot.

b) Határozzuk meg az origóból a $d = A_1A_2$ egyenesre bocsátott u merőleges egyenes egyenleteit valamint az origónak a d-től mért távolságát, ahol $A_i = \pi \cap d_i (i = 1,2)$.

c) Számítsuk ki az $A_1A_2A_3$ háromszög területét, ha $A_3 = \pi \cap d_3$.

E: a) $d_3 : 2x + 4y + z + 1 = 0$, $x - 3y + 3z + 4 = 0$, $d = \frac{5}{\sqrt{14}}$; b) $\sqrt{2}$.

27. Határozzuk meg a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó és a d: $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ egyenesre merőleges egyenes egyenleteit. Alkalmazás: határozzuk meg a $P_0(-1,2,3)$ ponton áthaladó d: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$ egyenesre merőleges egyenest.

E: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-3}{-29}$.

28. Adott a $d_1 : x-3 = \frac{y-8}{3} = \frac{z-3}{4}$ és $d_2 : \begin{cases} 7x-y-z-10=0 \\ 3x+y-z-12=0 \end{cases}$ egyenes. Igazoljuk, hogy a két egyenes egy síkban van és írjuk fel ennek a síknak az egyenletét.

E: $7x-y-z-10=0$

29. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza a $d_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-1}$ egyenest és párhuzamos a $d_2 : \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$ egyenessel. E:$x-2y-11=0$.

30. Tekintsük az $A(\alpha,0,0)$, $B(0,\beta,0)$, $C(0,0,\gamma)$ pontokat úgy, hogy $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1$. Mutassuk ki, hogy az ABC sík átmegy egy rögzített ponton.

31. Egy ortonormált koordinátarendszerben adottak az $M_1(2,1,-1)$ és $M_2(-3,0,2)$ pontok.

a) Határozzuk meg az M_1 és M_2 pontokon átmenő síksor egyenletét.

b) Határozzuk meg a síksor azon P síkját, amely merőleges az xOy síkra.

c) Határozzuk meg a síksor azon síkját, amely merőleges a P síkra. E: b) $x-5y+3=0$

32. Írjuk fel a $d_1 : \begin{cases} 9x-2y+3z-16=0 \\ 5x-2y+z-6=0 \end{cases}$ és $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-4}$ egyenesek által meghatározott sík egyenletét és számítsuk ki a d_1 és a d_2 egyenesek közti távolságot.

E: $x+2y+2z-9=0$, $\frac{6}{\sqrt{29}}$.

33. Igazoljuk, hogy az $x=-3t, y=2+3t, z=1$ és az $x=1+5s, y=1+13s, z=1+10s$ egyenesek metszik egymást és határozzuk meg a metszéspont koordinátáit! E: $(1,1,1)$.

34. Az m paraméter milyen értékére a $d : x=-1+3t, y=2+mt, z=-3-2t$ egyenesnek nincs közös pontja a $\pi : x+3y+3z-2=0$ síkkal? E: $m=1$.

35. Az a és d paraméterek milyen értékeire helyezkedik el a $d : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ egyenes a $\pi : ax+y-2z+d=0$ síkban. E: $a=-2, d=11$.

36. Az a és c paraméterek milyen értékeire merőleges a $d : \begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ egyenes a $\pi : ax+8y+cz+2=0$ síkra! E: $a=5, c=1$.

37. Határozzuk meg a $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ és $d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}$ egyenesek közös u merőlegesét és távolságát. E: $u : 5x+18y-29z+34=0, y-3z+1=0$, $d=\frac{2\sqrt{35}}{5}$.

38. Írjuk fel a $P(1,-1,1)$ ponton átmenő és az $x-y+z-1=0$, $2x+y+z+1=0$ síkokra merőleges sík egyenletét. E: $-2x+y+3z=0$.

39. Írjuk fel azon sík egyenletét, amely átmegy a $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,2,2)$ pontokon és merőleges az $x+y-z=0$ síkra. E: $x-y=0$.

40. Írjuk fel az $M_1(-3,2,5)$ pontból a $4x+y-3z+13=0, x-2y+z-11=0$ síkokra bocsátott merőlegesek által meghatározott síknak az egyenletét. E: $5x+7y+9z-44=0$.

41. Tanulmányozzuk az $\alpha : x + y - 2z = 3$, $\beta : x - y - z = -1$, $\gamma : 3x + 3y - 6z = 5$ síkok kölcsönös helyzetét.

42. Számítsuk ki az $M(3, 1, -1)$ pontnak az $\alpha : 22x + 4y - 20z - 45 = 0$ síktól való távolságát. E: $\frac{3}{2}$.

43. Határozzuk meg az $\alpha : x - 2y - 2z + 7 = 0$ és a $\beta : 2x - 4y - 4z + 17 = 0$ párhuzamos síkok közti távolságot! E: $\frac{1}{2}$.

44. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos a $2x - 2y - z - 6 = 0$ síkkal és 7 egységnyi távolságra van ettől a síktól!

E: $2x - 2y - z + 15 = 0$, $2x - 2y - z - 27 = 0$.

45. Határozzuk meg a $P(-5, 4, 1)$ pontnak az $d : x + 3 = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-3}$ egyenesre eső P' vetületét, majd a P pontnak a d egyenesre vonatkozó P'' szimmetrikusát!

E: $P'\left(-\frac{12}{5}, 3, \frac{1}{5}\right)$, $P''(\frac{1}{5}, 2, -\frac{3}{5})$.

46. Határozzuk meg a $P(5,2,1)$ pontnak az $x + y - 2z = -5$ síkra eső vetületét!

E: $A\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

47. Határozzuk meg a $Q(4, -5, 4)$ pont szimmetrikusát arra a síkra nézve, amely tartalmazza a

$$d_1 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

egyeneseket! E: $Q'(-2, 7, -2)$.

48. Határozzuk meg a d egyenes vetületét a π síkra, ahol

$$d : \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases} \quad \text{és } \pi : 3x + 2y - z - 2 = 0.$$

E: $\frac{x+2}{49} = \frac{y-1}{32} = \frac{z+6}{212}$.

49. Határozzuk meg a $d : x + 2y - z - 1 = 0, x - 1 = 0$ egyenesnek a $\pi : x + y + z = 0$ síkra eső merőleges vetületének egyenletét. E: $\frac{x+1/3}{-1} = \frac{y+1/3}{0} = \frac{z-2/3}{1}$.

50. Határozzuk meg a $d : \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ egyenesnek a $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$ síkra eső merőleges vetületének egyenleteit. E: $\frac{x+1/6}{1} = \frac{y-13/6}{1} = \frac{z-5/3}{0}$.

51. Határozzuk meg a d egyenes π sík szerinti d' szimmetrikusát, ahol

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \text{ és } \pi : x + 2y + z + 3 = 0.$$

E:$\pi \cap d = \{A\}, A(\frac{5}{9}, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{9}), d' : \frac{x-5/9}{1} = \frac{y+5/3}{3} = \frac{z+2/9}{2}$.

52. Határozzuk meg az $M_0(3, -2, 1)$ pont távolságát $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ egyenestől!

53. Írjuk fel a $2x+y-3z=5$ és a $x+3y+2z+1=0$ síkok által meghatározott lapszögek szögfelező síkjainak egyenletét. E: $x-2y-5z-6=0, 3x+4y-z-4=0$

54. Számítsuk ki az $\alpha : x+3y+2z+1=0$ és $\beta : 3x+2y-z=6$ síkok hajlásszögének mértékét. E: $60°$

55. Számítsuk ki az xOy sík és az M_1M_2 egyenes által alkotott szög mértékét, ha $M_1(1,2,3)$ és $M_2(-2,1,4)$. E: $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{11}}$

56. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder csúcspontjai $A_1(4,4,1)$, $A_2(2,-2,5)$, $A_3(0,7,-3)$, $A_4(1,9,3)$. Számítsuk ki annak a szögnek a mértékét, amelyet az A_4 csúcspont az $A_1A_2A_3$ háromszög súlypontja által meghatározott egyenes az $(A_1A_2A_3)$ síkkal alkot. E: $\sin\alpha=\frac{12}{\sqrt{205}}$

57. Határozzuk meg két összefutó egyenes által meghatározott szögek szögfelező egyeneseinek egyenleteit.

    Alkalmazás: a két adott egyenes $d_1 : 3x-y-z+2=0, 2x-y+2z-6=0$ és d_2: $\frac{x+3}{4}=\frac{y+5}{7}=\frac{z}{3}$. E: $s_1 : \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$, $s_2 : \frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{15}=\frac{z-3}{4}$.

58. Az Ox, Oy és Oz tengelyeken felvesszük az A, B és C pontokat úgy, hogy teljesüljön az $\frac{1}{OA}+\frac{2}{OB}+\frac{3}{OC}=\frac{1}{a}$ összefüggés. Igazoljuk, hogy az ABC sík áthalad egy rögzített ponton, és határozzuk meg ennek a pontnak a mértani helyét, amikor az a értéke változik.

59. Keressük meg annak feltételét, hogy négy sík áthaladjon egy közös ponton.

60. Határozzuk meg az a élű kocka valamely élének távolságát egy olyan testátlótól, amellyel nincsen közös pontja. E:$a\sqrt{2}/2$.

61. Adottak a $d_1 : 2x+y-11=0, x-z+3=0$ és $d_2 : 4x-19y+83=0, 11y+4z-79=0$ egyenesek.

    a) Igazoljuk, hogy az adott egyenesek rendelkeznek egy P_0 közös ponttal és merőlegesek egymásra.

    b) Írjuk fel a két egyenes által meghatározott sík egyenletét és igazoljuk, hogy ez nem merőleges az OP_0 egyenesre.

    E: $P_0(3,5,6)$.

62. Adott a $\pi : x+y+z+1=0$ sík és a $d : y-z+1=0, x+2z=0$ egyenes.

    a) Igazoljuk, hogy az egyenes a síkban fekszik.

    b) Írjuk fel a megadott síkra, az egyenes mentén merőlegesen emelt sík egyenletét.

    c) Írjuk fel a π sík d egyenesre merőleges egyeneseinek egyenleteit.

    E: b) $y-z+1=0$, c) $x=x_0, y-y_0=-z+z_0$.

63. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a $z=0$ síkra és tartalmazza az $A(1,-1,1)$ pontból a $d : x=0, y-z+1=0$ egyenesre bocsátott merőleges egyenest.

    E: $x+2y+1=0$.

64. Írjuk fel a $3x-y+4z-12=0$ síkból a koordinátasíkok által kimetszett háromszög Oz tengelyen fekvő csúcsához tartozó magassága tartóegyenesének egyenleteit és számítsuk ki a magasság hosszát.

E: $\frac{x}{-6}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5}$, $\frac{3\sqrt{65}}{5}$.

65. Adottak az $u_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ és $u_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ egyenesek.

a) Határozzuk meg a λ értékét úgy, hogy a két egyenes metsse egymást.

b) Ha π a fenti metsző egyenesek síkja, határozzuk meg az $A(1,2,0)$ pontnak a π szerinti szimmetrikusát.

c) Határozzuk meg az A pontnak az u_1 és u_2 egyenesekre eső merőleges vetületein áthaladó egyenes egyenleteit.

E: a) $\lambda=\frac{5}{4}$; b) $A'(-\frac{8}{13},\frac{19}{13},\frac{28}{13})$; c) $\frac{x}{181}=\frac{y-2}{-163}=\frac{z-1}{95}$.

66. Írjuk fel az $x+y-z-1=0, x-y+z+1=0$ és $2x-y+z-1=0, x+y-z+1=0$ egyeneseket metsző és az $x+y+z=0$ síkkal párhuzamos egyenesek egyenleteit. E:$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+\lambda}{-1}$.

67. Adottak az $u_1: \frac{x-3}{6}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{2}$ és $u_2: \frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{2}$ egyenesek. Határozzuk meg

a) az u_1 és u_2 egyenesek által meghatározott szögek szögfelezőinek egyenleteit.

b) az $A(2,3,1)$ pontnak az u_1 és u_2 egyenesekre eső A_1 és A_2 merőleges vetületeit.

c) a $P_0A_1A_2$ háromszög területét, ahol P_0 az u_1 és u_2 egyenesek metszéspontja.

68. Adottak az $u_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ és $u_2: x=t+2, y=2t-1, z=t+1$ egyenesek. Határozzuk meg

a) az u_1 és u_2 egyenesek közötti távolságot;

b) az u_1 és u_2 egyenesek által meghatározott sík egyenletét.

E: a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, b) $x-z-1=0$.

69. A π sík $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletében szereplő minden együttható nullától különböző. Igazoljuk, hogy ez a sík áthalad hét nyolcadon a koordináta-síkok által meghatározott nyolcadok közül.

70. Határozzunk meg egy olyan pontot az Oz tengelyen, amely egyenlő távolságra fekszik a $\pi_1: 12x+9y-20z-19=0$ és $\pi_2: 16x-12y+15z-9=0$ síkoktól.

E: $A_1(0,0,-\frac{28}{5})$, $A_2(0,0,-2/7)$.

71. Határozzuk meg egy tetraéder térfogatát, ha oldallapjainak egyenletei $x+y+z-1=0$, $x-y-1=0$, $x-z-1=0$ és $z-2=0$.

E: 6.

72. Írjuk fel azon egyenes egyenleteit, amely az $x+3y-2z-2=0$ síkban fekszik, az $x=y=z$ egyenesre támaszkodik és merőleges a $4x-y-z-3=0$ síkra.

E: $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$.

73. Írjuk fel azon egyenes egyenleteit, amely áthalad az $A(-1,\ 0,\ 1)$ pont $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ egyenes szerinti A' szimmetrikusán és merőleges a $2x - y - z - 1 = 0$ síkra.

E: $A'(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

74. Határozzuk meg a $P_0(-2, 0, 0)$ pontnak az $x = y = z$ egyenesre eső vetületén áthaladó és a $d_1 : x - y - 1 = 0, y - z - 2 = 0$ valamint $d_2 : 2x - y = 0, x - z - 1 = 0$ egyenesekre támaszkodó egyenes egyenleteit.

75. Határozzuk meg azon egyenes egyenleteit, amely áthalad az $A(2, -1, 0)$ pont $x - 2y + z = 0$ sík szerinti A' szimmetrikusán, párhuzamos a $2x + y + 3z - 1 = 0$ síkkal és merőleges az $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ egyenesre.

E: $\frac{x-2/3}{-5} = \frac{y-5/3}{1} = \frac{z+4/3}{3}$.

76. Adottak a $d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ és $d_2 : \frac{x-3}{l} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-5}{n}$ egyenesek.

a) Milyen feltételek mellett metszi egymást a két egyenes.

b) Határozzuk meg annak feltételét, hogy a két metsző egyenes merőleges is legyen egymásra.

c)Határozzuk meg a metszéspont koordinátáit.

E: a) $4l + m - 2n = 0, l \neq \frac{m}{2} \neq \frac{n}{3}$, b) $l = n$, c) $(\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2})$.

77. Adott a $P(1, -1, 0)$ pont és a d: $x - z - 3 = 0, y + 2z + 3 = 0$ egyenes.

a) Írjuk fel az origón és a P-ből d-re bocsátott merőlegesen áthaladó sík egyenletét.

b) Határozzuk meg a d és OP egyenesek közös merőlegesének egyenleteit.

E: a) $x + y + z = 0$, b) $x - 3 = y + 3 = z$.

78. Írjuk fel azon síkok általános egyenletét, amelyeknek az $x = 0, y = 0$ és $x + y - 1 = 0$ egyenletű síkok által meghatározott hasábbal való metszete egy szabályos háromszög.

E: $x + y + z + m = 0, x + y - z + n = 0, m, n \in \mathbb{R}$.

79. Igazoljuk, hogy az origón áthaladó egyenes egyenletei felírhatók az alábbi alakban:

$$\frac{x}{\sin\theta\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\theta\sin\varphi} = \frac{z}{\cos\theta}.$$

80. Adottak az Ox, Oy és Oz tengelyeken elhelyezkedő A, B és C pontok. Igazoljuk, hogy ha az AB egyenes áthalad egy P_1 rögzített ponton és a BC egyenes a rögzített P_2 ponton, akkor az AC egyenes is áthalad egy rögzített P_3 ponton, és a P_1, P_2, P_3 pontok kollineárisok.

81. Igazoljuk, hogy egy derékszög vetülete valamely síkra akkor és csak akkor lesz derékszög, ha a szög egyik szára párhuzamos a síkkal a másik pedig nem merőleges rá.

82. Ha egy tetraéderben két szembefekvő élpár élei merőlegesek egymásra, igazoljuk, hogy:

a) A harmadik élpár élei is merőlegesek egymásra.

b) A tetraéder magasságai egy pontban találkoznak.

c) A szembefekvő élek közös merőlegesei a magasságok metszéspontjában futnak össze.

d) A szembefekvő élek felezőpontjait összekötő szakaszok kongruensek.

e) Az oldallapokra azok súlypontjaiban emelt merőlegesek összefutó egyenesek.

f) A szembefekvő élek négyzetösszege állandó.

83. Igazoljuk, hogy egy tetszőleges tetraéderben:

a) A csúcspontokat a szembefekvő lapok súlypontjaival összekötő, valamint a szembefekvő élek felezőpontjait összekötő egyenesek összefutók.

b) Az egyes lapok belső szögfelezőin keresztül az illető lapra emelt merőleges síkok rendelkeznek egy közös egyenessel.

c) Valamely lap belső szögfelezőjén keresztül a lapra emelt merőleges sík és a szomszédos két lap külső szögfelezőjén keresztül az illető lapokra emelt merőleges síkok ugyancsak rendelkeznek egy közös egyenessel.

d) Az élek felezőmerőleges síkjai rendelkeznek egy közös ponttal.

84. Legyen $ABCDA'B'C'D'$ egy kocka, amelynek élhosszúsága $AB = a$. Tekintjük az $M \in (AB)$, $N \in (AD)$ és $P \in (AA')$ úgy, hogy $AM = \alpha$, $AN = \beta$ és $AP = \gamma$. Igazoljuk, hogy az $ABCDA'B'C'D'$ kockába írt gömb akkor és csakis akkor érinti az (MNP) síkot, ha fennáll a következő összefügges:

$$\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \sqrt{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2}} = a.$$

85. Egy $VABCD$ szabályos gúla alapjának az élhosszúsága $AB = BC = CD = DA = a$ és a $VA = VB = VC = VD = a\sqrt{2}$. A VA él M felezőpontján keresztül szerkesztünk egy a VC élre merőleges síkot, amely meghatároz egy síkmetszetet a gúlában. Határozzuk meg a síkmetszet kerületét, területét, valamint a síkmetszet által meghatározott két test térfogatának arányát.

86. Legyen $ABCDA'B'C'D'$ egy $AB = a$ élhosszúságú kocka, M és P a BC illetve AA' élek felezőpontjai, O a kocka középpontja, O' az $A'B'C'D'$ alsó lap középpontja, S pedig az OO' felezőpontja. Határozzuk meg az (MPS) sík által meghatározott síkmetszetet a kockában és ennek a területét.

87. Legyen $ABCDA'B'C'D'$ egy a élhosszúságú kocka, M és P a BC illetve AA' élek felezőpontjai,O' az $A'B'C'D'$ alsó lap középpontja. Határozzuk meg az (MPO') sík által meghatározott síkmetszetet a kockában és ennek a területét, kerületét.

88. Legyen $ABCDA'B'C'D'$ egy a élhosszúságú kocka. A $[CD$, $[CB$ és $[CC'$ félegyeneseken felvesszük az X, Y, Z pontokat úgy, hogy $CX = a + \alpha$, $CY = a + \beta$, $CZ = a + \gamma$, ahol $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Igazoljuk, hogy

i) az (XYZ) sík akkor és csakis akkor metszi hatszögben a kockát, ha $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha \in (0, a^2)$;

ii) ha $MNPQRS$ az előbbi alpontban meghatározott hatszög, akkor az MQ, NR, PS átlók akkor és csakis akkor összefutóak, ha

$$a^3 = a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2\alpha\beta\gamma.$$