Általános matematika 5. FELADATLAP

Valós függvények integrálása

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

$$a)\int x^2\sqrt{1+x^3}dx;\quad b)\int \frac{x}{x^2+a^2}{}^n dx;\quad c)\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx;\quad d)\int e^{\sin x}\cos x dx;$$

$$e)\int \frac{(\ln x)^n}{x}dx;\quad f)\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx;\quad g)\int \frac{x}{\ln x^{x^2}}dx;\quad h)\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx;$$

$$i)\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+3}dx;\quad j)\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx;\quad k)\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8-1}}dx;\quad l)\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}dx;$$

$$m)\int \frac{1}{x^2-8x+15}dx;\quad n)\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx;\quad o)\int \frac{x}{x^2+x+1}dx;\quad p)\int \frac{x+2}{2x^2+x-10}dx.$$

2. Parciális integrálás képlete:

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.}$$

A parciális integrálás képletét használva számítsuk ki a következő integrálokat:

$$a)\int \ln x dx;\quad b)\int x^p \ln x dx;\quad c)\int xe^{ax}dx;\quad d)\int \arcsin x dx;$$

$$e)\int \mathrm{arctg} x dx;\quad f)\int x\sin x dx;\quad g)\int \sqrt{a^2+x^2}dx;\quad h)\int x^2\ln(x^6-1)dx;$$

$$i)\int x^2e^{2x}dx;\quad j)\int (x^3+5x^2-2)e^{2x}dx.$$

3. Racionális törtek integrálása.

$$\boxed{\frac{P(x)}{(x-m)^3(ax^2+bx+c)^2} = \frac{A}{x-m} + \frac{B}{(x-m)^2} + \frac{C}{(x-m)^3} + \frac{Dx+E}{ax^2+bx+c} + \frac{Fx+G}{(ax^2+bx+c)^2},}$$

ahol az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei ($\Delta<0$) és a számláló ($P(x)$) foka kisebb mint a nevező foka.

Alkalmazás.

$$a)\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx;\quad b)\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx;\quad c)\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx;\quad d)\int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx;$$

$$e)\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}dx;\quad f)\int \frac{x^5+2}{x^5-x}dx;\quad g)\int \frac{1}{x^3+1}dx;\quad h)\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2}dx;$$

$$i)\int \frac{1}{x^2(x^2-1)^2}dx;\quad j)\int \frac{x}{x^3+x^2+x+1}dx.$$

4. Trigonometriai függvények integrálása: $\int R(\sin x,\cos x)dx = ?$

Lehetséges helyettesítések:

a) $\boxed{\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t;}$

b) $\boxed{\cos x = t}$, ha $R(\sin x,\cos x) = -R(-\sin x,\cos x)$, vagyis R páratlan a *sin*-ban;

c) $\boxed{\sin x = t}$, ha $R(\sin x,\cos x) = -R(\sin x,-\cos x)$, vagyis R páratlan a *cos*-ban;

d) $\boxed{\mathrm{tg}\ x = t}$, ha $R(\sin x,\cos x) = R(-\sin x,-\cos x)$, vagyis R páros *sin*-ban és *cos*-ban;

Alkalmazás:

$a) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx;$ $b) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx;$ $c) \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx;$

$d) \displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x;$ $e) \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 10x \sin 8x dx;$ $f) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+\cos x}dx;$

$g) \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \cos^2 x}dx;$ $h) \displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx.$

Néhány trigonometriai képlet:

1. $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)];$
2. $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)];$
3. $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)];$
4. $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$