1. Funcţii cu proprietatea lui Darboux

P 0.1 Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

a) Să se arate că funcţia f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.
b) Să se arate că funcţia f nu este continuă în punctul $x = 0$.

Rezolvare. *a*) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi fie $\gamma \in \mathbb{R}$ situat strict între $f(a)$ şi $f(b)$. Să arătăm că există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

a_1) Dacă $b < 0$, atunci $]a, b[\subseteq]-\infty, 0[$. Cum funcţia f este continuă pe intervalul pe $]-\infty, 0[$ deci pe $]a, b[$, în baza teoremei valorilor intermediare ( ), deducem că există un punct $c \in]a, b[$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

a_2) Dacă $a > 0$, atunci $]a, b[\subseteq]0, +\infty[$. Cum funcţia f este continuă pe intervalul pe $]0, +\infty[$ deci pe $]a, b[$, în baza teoremei valorilor intermediare ( ), deducem că există un punct $c \in]a, b[$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

a_3) Fie $a < 0 < b$ şi să presupunem că $f(a) < f(b)$. Considerăm şirurile (a_n) şi (b_n) cu

$$a_n = (2n\pi + \pi)^{-1}, \quad b_n = (2n\pi)^{-1}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Evident $0 < a_n < b_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, de unde rezultă că există un număr natural p astfel încât $0 < a_p < b_p < b$.

Pe altă parte, avem

$$-1 = f(a_p) \leq f(a) < \gamma < f(b) \leq f(b_p) = 1.$$

Cum funcţia f este continuă pe $]0, +\infty[$, deci pe $]a_p, b_p[\subseteq]0, +\infty[$, în baza teoremei valorilor intermediare, deducem că există un punct $c \in]a_p, b_p[\subseteq]0, b[\subseteq]a, b[$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

b) Fie (x_n) şirul cu termenul general $x_n = (2n\pi)^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(0)$, deci f nu este continuă în $x = 0$. ■

P 0.2 Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{dacă } x > 0 \\ 1, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Să se arate că funcţia f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.
b) Să se arate că funcţia f nu este continuă în punctul $x = 0$..

P 0.3 Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & \text{dacă } x>0\\ a, & \text{dacă } x\le 0.\end{cases}$$

a) Să se arate că funcţia f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$, oricare ar fi $a\in[-1,1]$.

b) Să se arate că funcţia f nu este continuă în punctul $x=0$.

P 0.4 Se da funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}(1/x)\sin(1/x), & \text{dacă } x\ne 0\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

a) Să se arate că funcţia f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f nu este continuă în punctul $x=0$.

P 0.5 Fie $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ cu $a<b$ şi fie $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ două funcţii continue pe $]a,b[$. Să se arate că dacă funcţiile f şi g sunt diferite, atunci funcţia $h:]a,b[\to\mathbb{R}$

$$h(x)=\begin{cases}f(x), & \text{dacă } x\in]a,b[\cap\mathbb{Q}\\ g(x), & \text{dacă } x\in]a,b[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux pe $]a,b[$.

Rezolvare. Din faptul că funcţiile f şi g sunt diferite, deducem că există un punct $x_0\in]a,b[$ astfel ca $f(x_0)\ne g(x_0)$. Să presupunem pentru fixarea ideilor că $f(x_0)<g(x_0)$.

Cum funcţia f este continuă în punctul x_0 rezultă că pentru $\varepsilon=(g(x_0)-f(x_0))/2>0$, există un număr real $\delta_f>0$ astfel încât pentru orice $x\in]x_0-\delta_f,x_0+\delta_f[\cap]a,b[$ avem $f(x)\in]f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon[$, de unde deducem că

$$f(x)<(f(x_0)+g(x_0))/2 \text{ oricare ar fi } x\in]x_0-\delta_f,x_0+\delta_f[\cap]a,b[.$$

Pe de altă parte, funcţia g fiind continuă în punctul x_0, rezultă că există un număr real $\delta_g>0$ astfel încât pentru orice $x\in]x_0-\delta_g,x_0+\delta_g[\cap]a,b[$ avem $g(x)\in]g(x_0)-\varepsilon,g(x_0)+\varepsilon[$, de unde deducem că

$$g(x)>(f(x_0)+g(x_0))/2 \text{ oricare ar fi } x\in]x_0-\delta_g,x_0+\delta_g[\cap]a,b[.$$

Fie $\delta=\min\{\delta_f,\delta_g\}$. Din cele de mai sus rezultă

(1)

$$f(x)<(f(x_0)+g(x_0)/2)<g(x) \text{ oricare ar fi } x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\cap]a,b[.$$

Fie $x_1\in]a,b[\cap]x_0-\delta,x_0[\cap\mathbb{Q}$ şi $x_2\in]a,b[\cap]x_0,x_0+\delta[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$. Evident $x_1<x_2$. Din definiţia funcţiei h şi (1) obţinem că $h(x_1)=f(x_1)<$

$(f(x_0) + g(x_0))/2 < g(x_2) = h(x_2)$. Vom arăta, folosind metoda reducerii la absurd, că pentru

$$\gamma = (f(x_0) + g(x_0))/2 \in]h(x_1), h(x_2)[$$

nu există nici un punct $c \in]x_1, x_2[$ astfel încât $f(c) = \gamma$. Intr-adevăr, dacă un astfel de punct $c \in]x_1, x_2[$ ar exista, atunci am obţine:

i) dacă $c \in \mathbb{Q}$, atunci $\gamma = h(c) = f(c) < \gamma$,

iar

ii) dacă $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\gamma = h(c) = g(c) > \gamma$.

Aşadar funcţia h nu are proprietatea lui Darboux pe $]a, b[$. ■

P 0.6 Fie $a > 0$ şi $f : [-a, a] \to [-a, a]$ o funcţie continuă. Să se arate că există cel puţin un punct $b \in [-a, a]$ astfel încât $f(b) = b$ şi cel puţin un punct $c \in [-a, a]$ astfel încât $f(c) = -c$.

Rezolvare. Fie $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $g(x) = f(x) - x$, oricare ar fi $x \in [-a, a]$. Evident, funcţia g este continuă şi

$$g(-a)g(a) = (f(-a) + a)(f(a) - a) \le 0;$$

atunci, în baza teoremei /, există cel puţin un punct $b \in [-a, a]$, astfel încât $g(b) = 0$, de unde deducem că $f(b) = b$.

Pentru a arăta că există un punct $c \in [-a, a]$ astfel încât $f(c) = -c$, se procedează ca mai sus, considerând acum funcţia $h : [-a, a] \to \mathbb{R}$ definită prin $h(x) = f(x) + x$, oricare ar fi $x \in [-a, a]$. ■

P 0.7 Fie $f : \mathbb{R} \to]-\infty, 1[$, $g : \mathbb{R} \to]1, +\infty[$ două funcţii continue. Să se arate că, dacă există a, $b \in]0, +\infty[$ cu $a < b$ şi $f(a) = a$, $g(b) = b$, atunci există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ astfel încât $f(c)g(c) = c$.

P 0.8 Fie $f : \mathbb{R} \to]-\infty, 1[$, $g : \mathbb{R} \to]1, +\infty[$ şi $h : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ trei funcţii continue. Să se arate că, dacă există a, $b \in]0, +\infty[$ cu $a < b$ şi $f(a) = h(a)$, $g(b) = h(b)$, atunci există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ astfel încât $f(c)g(c) = h(c)$.

P 0.9 Să se arate că pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$, există cel puţin un punct $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(c) = c$.

P 0.10 Fie f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $g(a) < f(a)$ şi $f(b) < g(b)$. Atunci există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ cu proprietatea că $f(c) = g(c)$.

P 0.11 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $a \le f(a)$ şi $f(b) \le b$. Atunci există cel puţin un punct $c \in [a, b]$ cu proprietatea că $f(c) = c$.

P 0.12 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f(a) = f(b)$ şi fie $c = (a + b)/2$. Atunci există cel puţin un punct $d \in [0, (b - a)/2]$ cu proprietatea că $f(a + d) = f(c + d)$.

P 0.13 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f(a) = f(b)$. Dacă pentru orice $x \in]a, b[$ avem $f(x) \neq f(a)$, atunci oricare ar fi $c \in]0, b - a[$ există $x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel încât $x_2 - x_1 = c$ şi $f(x_1) = f(x_2)$.

P 0.14 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < 0 < b$ şi $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcţie continuă. Să se arate ca există cel puţin un punct $c \in [a, b]$ cu proprietatea că $cf(c) = ab$.

P 0.15 Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ cu $a < b$ şi fie $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că dacă există $f(a + 0)$ şi $f(b - 0)$ şi au semne contrare, atunci există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ astfel încât $f(c) = 0$.

P 0.16 Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f(a) = f(b)$. Dacă $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ şi $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, atunci funcţia f ia orice valoare din intervalul $]m, M[$ cel puţin de două ori.

P 0.17 Fie $f : [0, 1] \to [0, 1] \cup [2, 3]$ o funcţie continuă astfel încât $f(1/2) = 0$. Să se arate că:

$a)$ funcţia f nu este surjectivă;
$b)$ funcţia f nu este strict crescătoare;
$c)$ funcţia f nu este injectivă.

P 0.18 Să se arate că dacă $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, atunci funcţia f este mărginită pe $[0, +\infty[$.

P 0.19 Să se arate că, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi există limitele $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi sunt numere reale, atunci funcţia f este mărginită pe $\mathbb{R}$.

P 0.20 Arătaţi că ecuaţia $2^x(x^2 + 1) - 3 = 0$, are o singură soluţie reală, care este situată în intervalul $]0, 1[$.

P 0.21 Arătaţi că ecuaţia $x + \ln x = 0$, are o singură soluţie reală, care este situată în intervalul $]1/\mathrm{e}, 1[$.

P 0.22 Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^5 - 3x + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, se anulează cel puţin o dată în intervalul $]1, 2[$.

P 0.23 Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x2^x - 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, se anulează cel puţin o dată în intervalul $]0, 1[$.

P 0.24 Stabiliţi numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei:
a) $x^3 + 3x + 1 = 0$; *b)* $x^3 - 3x + 1 = 0$.

P 0.25 Să se arate că ecuaţia

$$x \sin^n x - 1 = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^* \text{ este fixat}),$$

are exact o soluţie în intervalul $]0, \pi/2[$.

P 0.26 Arătaţi că, dacă x_1 este o soluţie a ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$ şi x_2 este o soluţie a ecuaţiei $-ax^2 + bx + c = 0$, atunci ecuaţia

$$(a/2)x^2 + bx + c = 0$$

are o soluţie situată între x_1 şi x_2.

2. Funcţii uniform continue

P 0.27 Să se arate că funcţia $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2$, oricare ar fi $x \in]0, 1[$, este uniform continuă pe $]0, 1[$.

Rezolvare. Fie x, $u \in]0, 1[$; atunci $x + u \in]0, 2[$ şi deci

$$|f(x) - f(u)| = |x + u| \, |x - u| \leq 2 \, |x - u| \, .$$

De aici deducem că, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $\delta = \varepsilon/2 > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi x, $u \in]0, 1[$ cu $|x - u| < \delta$ să avem

$$|f(x) - f(u)| \leq 2 \, |x - u| < 2\delta = \varepsilon.$$

Aşadar, funcţia f este uniform continuă pe $]0, 1[$. ■

P 0.28 Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare. Presupunem, prin absurd, că funcţia f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$ şi fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci există $\delta > 0$ astfel încât, oricare ar f în x, $u \in \mathbb{R}$ cu $|x - u| < \delta_\varepsilon$, să avem $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Fie $x = 2\varepsilon/\delta$ şi $u = x + \delta/2$. Evident, x, $u \in \mathbb{R}$, $|x - u| = \delta/2 < \delta$, $|x + u| = 4\varepsilon/\delta + \delta/2 > 4\varepsilon/\delta$ şi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(u)| &= |x - u| \, |x + u| = \delta \, |x + u| \, /2 > \\ &> (\delta/2)(4\varepsilon/\delta) = 2\varepsilon > \varepsilon, \end{aligned}$$

ceea ce contrazice $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Aşadar, funcţia f nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. ■

P 0.29 Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia f este uniform continuă pe D dacă şi numai dacă oricare ar fi şirurile (x_n) şi (u_n) cu elemente din D astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - u_n) = 0$ să avem $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(u_n)) = 0$.

P 0.30 Studieţi uniform continuitatea următoarelor funcţii pe mulţimea lor de definiţie:

a) $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \ln x$, oricare ar fi $x \in]0,1[$;

b) $f :]1/2,1[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \ln x$, oricare ar fi $x \in]1/2,1[$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \cos x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

e) $f :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin(1/x)$, oricare ar fi $x \in]0,\pi[$;

f) $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \exp(x)\cos(1/x)$, oricare ar fi $x \in]0,1[$;

g) $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{x}$, oricare ar fi $x \in [0,+\infty[$.