UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI"
Facultatea de Matematică şi Informatică
Cluj-Napoca, România

Construcţii de multialgebre

Teză de doctorat

Cosmin–Răzvan Pelea

Conducător ştiinţific:
Prof. Dr. Ioan Purdea

2003

Cuprins

Introducere

Primii paşi în teoria multialgebrelor (numite şi hiperstructuri sau multistructuri) au fost făcuţi în anii 1930. Mai exact, prima lucrare în domeniu aparţine matematicianului francez F. Marty care, în cadrul celui de-al VIII-lea Congres al matematicienilor din ţările scandinave (1934), a prezentat o generalizare a noţiunii de grup pe care a numit-o hipergrup, precum şi câteva proprietăţi legate de aceasta. Încă din articolele imediat următoare ale lui Marty avea să se întrevadă faptul că aceste obiecte pot fi folosite cu succes ca instrumente în alte teorii din domeniul matematicii. Câteva dintre legăturile hiperstructurilor cu alte arii ale matematicii, cu care ne-am întâlnit pe parcursul redactării acestei teze, ar fi cele privitoare la studiul fracţiilor raţionale (Marty: [49]), al mulţimilor ordonate (Benado: [1], [2], Călugareanu şi Leoreanu: [8]), al tablelor caracterelor grupurilor finite (Roth: [72], [74], McMullen şi Price: [51]), al relaţiilor binare (Rosenberg: [71], Corsini: [11], Corsini şi Leoreanu: [14]), al mulţimilor fuzzy (Corsini şi Leoreanu: [12], [15], Leoreanu: [44]) şi al tipurilor abstracte de date (Walicki şi Meldal: [89]). Menţionăm, de asemenea, că tabla Cayley slabă, care este utilizată de Johnson, Mattarei şi Sehgal în [37] pentru determinarea 1 şi 2-caracterelor unui grup finit, este un exemplu de cvasihipergrup cu unitate (deşi autorii nu specifică aceasta). Imaginea asupra legăturilor dintre multialgebre şi alte domenii de cercetare este completată de cartea [16] aparţinând lui P. Corsini şi V. Leoreanu.

Primele multialgebre studiate sunt hipergrupoizii, semihipergrupurile şi hipergrupurile. Apar ulterior şi rezultate privind alte hiperstructuri cum ar fi hiperinelele, hipermodulele, multilaticile. Menţionăm că o contribuţie majoră la studiul multilaticilor a avut matematicianul român Mihail Benado. De o importanţă deosebită în teoria multialgebrelor sunt articolele lui Grätzer ([27]) şi Pickett ([67]). Aceştia privesc multialgebrele ca particularizări ale sistemelor relaţionale ce generalizează noţiunea de algebră universală şi, prin rezultatele obţinute, plasează multialgebrele în imediata vecinătate a algebrelor universale. Mărturie în acest sens stau şi o parte din proprietăţile stabilite de noi, care extind unele rezultate cunoscute pentru algebre universale. Pe direcţia trasată de Grätzer şi Pickett se încadrează şi lucrările [36] (Höft şi Howard), [33], [34] (Hansoul), [75] (Schweigert), [90] (Walicki şi Białasik) şi, mai recent, [4] (Breaz şi Pelea), [59], [60], [61] (Pelea). Este de notat faptul că în articolele menţionate ale lui Hansoul, Walicki şi Białasik noţiunea de multioperaţie nu comportă faptul că imaginile acesteia sunt mulţimi nevide. Multialgebrele înzestrate cu astfel de multioperaţii sunt mai apropiate de sisteme relaţionale decât de algebre universale, iar pentru ele nu mai funcţionează teorema de reprezentare dată de Grätzer în [27].

Ca şi în alte teorii, în teoria multialgebrelor este de o importanţă deosebită obţinerea de obiecte noi pornind de la obiecte date. În acest context se înscriu şi construcţiile de multialgebre. Cele mai simple sunt formarea de submultialgebre şi de multialgebre cât (sau factor), acestea din urmă fiind mult studiate încă de la începuturile acestei teorii. De altfel, acest lucru era de aşteptat deoarece apariţia noţiunii de hipergrup se datorează factorizării unui grup după relaţia de echivalenţă la stânga determinată de un subgrup, iar mai apoi George Grätzer a demonstrat că orice multialgebră se obţine factorizând convenabil o algebră universală după o relaţie de echivalenţă. Cercetările noastre se înscriu într-un cadru în care există deja rezultate privind produsele directe şi subdirecte de multialgebre, precum şi proprietăţi referitoare la limite directe de sisteme directe şi limite inverse de sisteme inverse de hiperstructuri particulare.

Dintre construcţiile studiate în această teză amintim submultialgebrele şi, în special, submultialgebra generată de o submulţime, multialgebrele factor, produsele directe, limitele directe de sisteme directe şi limitele inverse de sisteme inverse de multialgebre. Avantajele pe care le prezintă rezultatele pe care le obţinem aici constau nu doar în caracterul lor de generalitate ci şi în faptul că anumite proprietăţi existente în literatură pot fi obţinute destul de uşor ca şi consecinţe ale rezultatelor noastre.

Lucrarea este structurată pe două capitole. Capitolul întâi are opt paragrafe, iar al doilea are şase. Primul capitol se deschide cu un paragraf introductiv care prezintă noţiunea de multialgebră şi câteva multialgebre particulare care intervin, cel mai adesea ca exemple, pe parcursul lucrării. Menţionăm că pentru o multialgebră, mulţimea suport este notată cu litere mari ale alfabetului latin (A, B, $\ldots$), iar multialgebra, cu corespondentul lor în scriere gotică ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ...). Pe alocuri, vom neglija această convenţie, fără a crea astfel confuzie (ca de exemplu în paragraful 1.3). Pornind de la o multialgebră $\mathfrak{A}$, Pickett introduce în [67] o structură de algebră universală $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ pe mulţimea $P^*(A)$ a părţilor nevide ale mulţimii A. În paragraful secund al capitolului întâi amintim cum se definesc funcţiile algebrice şi polinoamele unei algebre universale, precum şi modul în care acestea din urmă se obţin din simbolurile polinomiale. Discuţia este plasată în $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$, ceea ce permite introducerea unor funcţii algebrice particulare care îşi dovedesc utilitatea în paragrafele 1.6 şi 1.8. Al treilea paragraf este dedicat submultialgebrelor unei multialgebre. Contribuţia originală în acest paragraf constă în caracterizarea submultialgebrei generate de o submulţime într-o multialgebră (Teorema 1.3.13). Pickett a constatat că dată fiind o submulţime B a mulţimii suport A a unei multialgebre $\mathfrak{A}$, B este o submultialgebră a multialgebrei $\mathfrak{A}$ dacă şi numai dacă $P^*(B)$ este o subalgebră pentru algebra $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$. Pornind de la acest fapt, deducem câteva corolare (1.3.5 şi 1.3.6) care permit scrierea submultialgebrei generate de o submulţime X a unei multialgebre $\mathfrak{A}$ ca reuniune a tuturor imaginilor de submulţimi cu un element ale lui X prin polinoame ale algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ (Teorema 1.3.13).

Există mai multe generalizări ale noţiunii de omomorfism pentru multialgebre. Noi utilizăm doar două dintre acestea, una numită chiar omomorfism (care provine din considerarea multialgebrelor ca sisteme relaţionale) şi una numită omomorfism ideal (a cărei definiţie este analogă celei de la algebre universale). Am preluat de la Pickett ([67]) faptul că omomorfismele ideale de multialgebre determină şi sunt determinate de o clasă specială de relaţii de echivalenţă ce se definesc pe multialgebre, şi anume echivalenţele ideale. În acelaşi articol al lui Pickett este menţionată o conexiune între omomorfismele ideale de multialgebre şi anumite omomorfisme ale algebrelor de submulţimi nevide corespunzătoare. Fie folosind această conexiune, fie pe cale directă, am stabilit în paragraful 1.4 legături ale omomorfismelor dintre două multialgebre $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ cu polinoamele algebrelor universale $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{B})$. Astfel, am arătat în Propoziţia 1.4.9 şi Corolarul 1.4.14 că pentru aceste polinoame şi pentru omomorfismele prezente aici au loc proprietăţi asemănătoare cu cele cunoscute pentru algebre universale. Am arătat, de asemenea, că echivalenţele ideale ale unei multialgebre $\mathfrak{A}$ sunt strâns legate de anumite congruenţe ale algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ (Teorema 1.4.5), ceea ce permite o caracterizare a echivalenţelor ideale ale unei multialgebre (Propoziţia 1.4.7). Rezultatele originale din paragrafele 1.3 şi 1.4 au fost obţinute împreună cu Simion Breaz şi au fost publicate în [4].

Unul dintre cele mai importante rezultate referitoare la multialgebre este teorema de caracterizare a lui George Grätzer ([27]). Aceasta face din studiul multialgebrelor o extindere naturală a teoriei algebrelor universale. În acest context de naturalitate se înscriu şi ultimele paragrafe ale primului capitol din teză. Una din problemele lansate de Grätzer în [27] este următoarea: *Ce sunt multialgebrele factor ale unui grup, ale unui grup abelian, ale unei latici, ale unui inel etc.? Caracterizaţi acestea cu un sistem potrivit de axiome.* Se observă că aceste algebre universale particulare sunt date prin identităţi, ceea ce ne-a determinat să ne îndreptăm atenţia asupra a ceea ce se întâmplă cu identităţile unei algebre în urma factorizării după o relaţie de echivalenţă. Urmărind definiţiile hiperstructurilor din lucrările lui P. Corsini ([10]) şi T. Vougiouklis ([85], [86], [87], [88]) — unele dintre ele prezentate şi în primul paragraf al acestei lucrări — se constată necesitatea adaptării la multistructuri a noţiunii de identitate întâlnită la algebre universale. Introducem astfel două tipuri de identităţi la multialgebre: identităţi (tari) şi identităţi slabe. Un răspuns la prima parte a problemei lui Grätzer rezultă imediat prin stabilirea faptului că identităţile unei algebre universale conduc, în general, la identităţi slabe pe multialgebra cât. Atât identităţile algebrei, cât şi echivalenţa în raport cu care factorizăm pot face ca identităţile pe care le obţinem pe multialgebra factor să fie tari. De exemplu, identităţile care definesc comutativitatea unei multioperaţii se păstrează în formă tare şi în multialgebra factor. O serie de observaţii şi exemple care justifică aceste afirmaţii fac subiectul paragrafului 1.5.

Este cunoscut faptul că prin factorizarea unei algebre universale după o congruenţă ce include o relaţie se obţine o algebră universală în care oricare două elemente care sunt în relaţia dată determină aceeaşi clasă. Studiul nostru evoluează înspre a arăta că factorizarea unei algebre universale după o relaţie de echivalenţă — care a dus la apariţia multialgebrelor — poate fi privită ca un ,,pas intermediar” al unei astfel de factorizări. Aceasta conduce la studiul unor echivalenţe (ideale) care au proprietatea că multialgebrele factor determinate de ele sunt algebre universale. Astfel de echivalenţe apar în literatura de specialitate încă în primele articole referitoare la hipergrupuri, cum ar fi cele ale lui Dresher, Ore ([19]) şi Ore, Eaton ([22]). O serie importantă de lucrări legate de astfel de echivalenţe ale hipergrupoizilor, semihipergrupurilor, hipergrupurilor, hiperinelelor şi altor multistructuri particulare apar după anul 1990 şi converg spre studiul celei mai mici echivalenţe de acest tip.

În Propoziţia 1.6.1 am dat o caracterizare a echivalenţelor unei multialgebre $\mathfrak{A}$ pentru care multialgebra cât este o algebră universală, iar în Teorema 1.6.13 am determinat cea mai mică echivalenţă $\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ pe A cu această proprietate. Aplicând Teorema 1.6.13 la semihipergrupuri, hipergrupuri şi hiperinele, obţinem relaţia fundamentală a acestor hiperstructuri (studiată, de exemplu, în lucrările lui Corsini ([10]), Freni ([25]), Guţan ([31]), Vougiouklis ([83])). Datorită acestui fapt, am numit relaţia $\alpha^*_{\mathfrak{A}}$, relaţie fundamentală şi în cazul multialgebrei $\mathfrak{A}$. Algebra universală cât determinată de aceasta am numit-o algebra fundamentală. Folosind Teorema 1.6.18 în care am arătat că orice omomorfism între două multialgebre induce un omomorfism între algebrele fundamentale corespunzătoare, am definit un functor covariant de la categoria multialgebrelor de un tip dat la categoria algebrelor universale de acelaşi tip (Observaţia 1.6.21).

O întrebare care apare în mod firesc este ce se întâmplă cu identităţile (tari sau slabe) ale unei multialgebre în urma factorizării cu relaţia fundamentală. Răspunsul îl dăm în Propoziţia 1.7.1 în care stabilim că acestea devin identităţi ale algebrei universale astfel obţinute. Se constată uşor că o identitate a algebrei fundamentale nu este necesar să provină dintr-o identitate, nici chiar slabă, a multialgebrei de la care plecăm. Totuşi, modelul oferit de semihipergrupurile şi hipergrupurile complete, ne conduce la construcţia unei clase de multialgebre — multialgebrele complete — care au proprietatea că orice identitate a algebrei fundamentale este verificată, măcar în formă slabă, pe multialgebra de la care pornim — a se vedea demonstraţia Propoziţiei 1.7.6 şi Propoziţia 1.7.11.

În ultimul paragraf din primul capitol determinăm cea mai mică echivalenţă pentru care multialgebra factor este o algebră universală care verifică o identitate dată (Teorema 1.8.3). Aplicând această teoremă la (semi)hipergrupuri şi la identitatea care exprimă comutativitatea hiperprodusului, se obţine relaţia introdusă de Freni în [26] cu scopul de a obţine o caracterizare a (sub)hipergrupului derivat al unui hipergrup. Noi am demonstrat că multialgebra rezultată dintr-o algebră universală $\mathfrak{B}$ prin factorizare după o echivalenţă ρ, conduce, prin factorizare după relaţia introdusă de noi, la aceeaşi algebră care s-ar obţine ca algebra cât a algebrei universale $\mathfrak{B}$ în raport cu cea mai mică congruenţă ce conţine atât echivalenţa ρ cât şi perechile de elementele din $\mathfrak{B}$ pe care identitatea cu care lucrăm le face egale (Teorema 1.8.9). Folosind Teorema 1.8.9 am realizat o conexiune între subgrupul derivat al unui grup şi subhipergrupul derivat al hipergrupului său factor determinat de echivalenţa la stânga asociată unui subgrup (Exemplul 1.8.10).

Rezultatele din paragrafele 1.5, 1.6, 1.7, 1.8 sunt originale şi au fost publicate, acceptate spre publicare sau trimise spre publicare. Astfel, rezultatul principal al paragrafului 1.6 (Teorema 1.6.13) l-am publicat în [59], finalul paragrafului 1.6 şi pagragraful 1.7 îşi aşteptă publicarea în [62], iar paragrafele 1.5 şi 1.8 alcătuiesc o lucrare elaborată împreună cu domnul profesor Ioan Purdea, aflată încă în fază de preprint ([66]).

În capitolul al doilea studiem proprietăţi legate de produse directe, limite directe de sisteme directe şi limite inverse de sisteme inverse de multialgebre. Toate aceste construcţii sunt generalizări ale celor cunoscute de la algebre universale şi au un caracter de naturalitate care provine din faptul că se obţin obiecte ale categoriei multialgebrelor corespunzătoare construcţiilor similare din teoria categoriilor. Menţionăm că rezultate legate de construcţii de multialgebre cu aspect categorial au fost obţinute de Walicki şi Białasik în lucrarea [90]. În [90] se arată că multialgebrele, împreună cu omomorfismele, formează o categorie cu produse finite, cu egalizatori, cu coproduse finite, cu coegalizatori, deci cu limite şi colimite finite. Întrucât construcţia egalizatorilor şi a coproduselor foloseşte din plin faptul că imaginea unei multioperaţii poate să fie vidă, devine incertă posibilitatea de a prelua aceste proprietăţi pentru categorii ale căror obiecte sunt multialgebre caracterizate de teorema lui Grätzer. Ca exemplu în acest sens, subliniem faptul că multialgebrele de tip $\tau = (n_\gamma)_{\gamma<o(\tau)}$ formează o subcategorie în categoria sistemelor relaţionale de tip $(n_\gamma+1)_{\gamma<o(\tau)}$ care nu este închisă la limite inverse.

Capitolul secund este o colecţie de rezultate care ne aparţin. Primul paragraf cuprinde o serie de proprietăţi ale produsului direct al unei familii de multialgebre, majoritatea publicate în articolul [61]. Walicki şi Białasik au demonstrat în [90] că pentru două multialgebre, produsul direct este produsul în sens categorial. Fără modificări consistente în demonstraţie, proprietatea se demonstrează şi pentru o familie oarecare de multialgebre (Propoziţia 2.1.1). Am arătat că pe produsul direct se păstrează identităţile pe care le verifică multialgebrele de la care pornim (Propoziţiile 2.1.3 şi 2.1.4) şi că produsul direct al unei familii de multialgebre complete este o multialgebră completă (Propoziţia 2.1.7).

Un alt aspect pe care îl urmărim pentru fiecare din construcţiile realizate este dacă şi când functorul obţinut prin factorizare după relaţia fundamentală comută cu acestea.

Paragraful 2.2 prezintă rezultatele din lucrarea noastră [63] care a fost acceptată spre publicare de *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*. În Exemplul 2.2.1 arătăm că functorul introdus în paragraful 1.6 nu comută, în general, cu produsele de multialgebre. Am stabilit, totuşi, într-un caz mai restrâns, o condiţie necesară şi suficientă pentru ca algebra fundamentală a produsului direct al unei familii de multialgebre să fie izomorfă cu produsul direct al algebrelor fundamentale corespunzătoare (Propoziţia 2.2.2). Condiţia din Propoziţia 2.2.2 este destul de complicată dar ea ne conduce la o condiţie suficientă (Corolarul 2.2.3) care ne ajută să stabilim când este verificată proprietatea de mai sus pentru hipergrupuri şi pentru multialgebre complete (Teoremele 2.2.9 şi 2.2.12).

În paragraful 2.3 am realizat construcţia limitei directe a unui sistem direct $\mathcal{A}$ de multialgebre. Am considerat că sistemul direct $\mathcal{A}$ este constituit peste o mulţime ordonată dirijată superior $(I, \leq)$ şi am arătat că anumite proprietăţi ale mulţimii ordonate $(I, \leq)$ simplifică realizarea acestei construcţii (Propoziţia 2.3.8 şi Teorema 2.3.10). Am demonstrat, de asemenea, că o clasă de multialgebre închisă la imagini izomorfe este închisă la formarea de limite directe de sisteme directe arbitrare dacă şi numai dacă este închisă la formarea de limite directe de sisteme directe bine ordonate (Teorema 2.3.12). Considerând într-un sistem direct de multialgebre că toate omomorfismele sunt ideale rezultă imediat faptul că dacă multialgebrele noastre sunt algebre atunci ceea ce se obţine este construcţia omonimă de la algebre universale. În acest caz, din rezultatele menţionate anterior se obţin Lema 7, Teorema 2 şi Teorema 4 din [29, §21]. O parte din proprietăţile stabilite de Romeo în [70] şi de Leoreanu în [40] şi [46] pot fi obţinute folosind Propoziţia 2.3.8 şi Propoziţiile 2.3.14, 2.3.16, care afirmă că limita directă a unui sistem direct de multialgebre pe care este satisfăcută o identitate dată, tare sau slabă, verifică această identitate. Folosind Teorema 2.4.1, în care arătăm că functorul F determinat de factorizarea după relaţia fundamentală este un adjunct la stânga pentru functorul de incluziune, am dedus că F comută cu limitele directe de sisteme directe de multialgebre (Corolarul 2.4.2).

Ultima construcţie pe care o dăm în această teză este cea a limitelor inverse de sisteme inverse de multialgebre. La începutul paragrafului 2.5 demostrăm că limita inversă a unui sistem invers de multialgebre de tip $\tau = (n_\gamma)_{\gamma < o(\tau)}$ în categoria sistemelor relaţionale de tip $\tau' = (n_\gamma + 1)_{\gamma < o(\tau)}$ nu este întotdeauna o multialgebră (Exemplul 2.5.6). Am stabilit o serie de proprietăţi analoge cu cele de la limite directe (Propoziţia 2.5.14, Teorema 2.5.16

şi Teorema 2.5.17). O componentă importantă a acestor rezultate constă în stabilirea de condiţii în care limita inversă a unui sistem invers de multialgebre este o multialgebră. Fie K o clasă de multialgebre de tip τ închisă la imagini izomorfe. În Teorema 2.5.17 am stabilit o condiţie necesară şi suficientă pentru ca limita inversă a unui sistem invers de multialgebre din K să fie o multialgebră din K. În paragraful 2.6 studiem comutativitatea functorului F determinat de relaţia fundamentală cu limitele inverse de sisteme inverse. Acest functor nu comută, în general, cu limitele inverse (Exemplul 2.6.2). Pornind de la Propoziţia 2.5.14 şi Teorema 2.5.16 am demonstrat în ultimul paragraf Propoziţiile 2.6.3 şi 2.6.4 care prezintă, în anumite cazuri, condiţii necesare şi suficiente pentru ca algebra fundamentală a limitei inverse a unui sistem invers de multialgebre să fie limita inversă a sistemului invers format cu algebrele fundamentale corespunzătoare. Am considerat functorul F definit pe subcategorii de multialgebre ca cele din Teorema 2.5.17 şi am stabilit cu ajutorul Propoziţiilor 2.6.3 şi 2.6.4 o condiţie necesară şi suficientă pentru ca acest functor să comute cu limitele inverse de familii inverse (Teorema 2.6.5).

Sentimente de adâncă recunoştinţă se îndreaptă spre familia mea, care a dat dovadă de nemăsurată răbdare şi înţelegere pe parcursul redactării acestei teze. Doresc să mulţumesc domnului profesor Ioan Purdea, pentru discuţiile şi observaţiile care au dus la realizarea ei. De asemenea, mulţumesc domnului profesor Nicolae Both pentru atenta citire a manuscrisului şi pentru sugestiile sale şi bunului meu prieten Simion Breaz pentru dialogurile matematice care se fac simţite şi în rândurile acestei lucrări. Gândurile mele bune se îndreaptă şi spre profesorii mei Grigore Călugăreanu, Rodica Covaci, Andrei Mărcuş precum şi spre colegii mei Septimiu Crivei, Christian Săcărea, Ciprian Modoi, Csaba Szanto, Iluska Bonta, Camelia Dicu, pentru atmosfera caldă din cadrul catedrei de algebră şi pentru sfaturile pe care mi le-au oferit cu generozitate.

Cosmin Pelea

Cluj–Napoca,

Septembrie 2003.

Capitolul 1

Multialgebre. Submultialgebre. Multialgebre factor

Acest capitol este dedicat submultialgebrelor şi multialgebrelor factor ale unei multialgebre. Primele patru paragrafe au rolul de a ne introduce în cadrul în care se desfăşoară discuţia în lucrarea de faţă. În această parte din teză, aportul nostru constă în conexiunile realizate între submultialgebrele şi omomorfismele de multialgebre şi polinoamele algebrelor părţilor nevide ale multialgebrelor cu care lucrăm. Folosind aceste legături, în Teorema 1.3.13 am descris submultialgebra unei multialgebre $\mathfrak{A}$ generată de o submulţime cu ajutorul polinoamelor algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$. În cazul algebrelor universale aceasta ne conduce la o caracterizare binecunoscută a subalgebrei generate. Rezultatele noastre cuprinse în aceste paragrafe au fost publicate în lucrarea [4], elaborată în colaborare cu Simion Breaz.

Paragrafele care urmează se referă în cea mai mare parte a lor la factorizări ale multialgebrelor după relaţii de echivalenţă. Aproape toate proprietăţile cuprinse în aceste paragrafe sunt originale. Din paragraful 1.6 amintim Propoziţia 1.6.1 în care dăm o caracterizare a acelor echivalenţe pentru care multialgebra factor este o algebră universală, şi Teorema 1.6.13 care descrie, pentru o multialgebră dată, cea mai mică relaţie de acest fel (numită relaţia fundamentală). Menţionăm că Teorema 1.6.13 am publicat-o în lucrarea [59].

În finalul paragrafului 1.6 am demonstrat că factorizarea în raport cu relaţia fundamentală are un caracter functorial (Teorema 1.6.18 şi Corolarele 1.6.19 şi 1.6.20). Paragraful 1.7

începe cu Propoziţia 1.7.1 în care am arătat că pe algebra cât obţinută factorizând o multialgebră $\mathfrak{A}$ în raport cu relaţia sa fundamentală (numită algebră fundamentală) se menţin identităţile pe care multialgebra $\mathfrak{A}$ le verifică, chiar şi numai în formă slabă. De asemenea am demonstrat, în Propoziţia 1.7.6, că între toate multialgebrele cu aceeaşi mulţime suport şi aceeaşi algebră fundamentală găsim multialgebre care verifică (măcar în formă slabă) toate identităţile valabile pentru algebra fundamentală. Demonstraţia acestei propoziţii ne conduce spre o clasă de multialgebre, caracterizate prin Propoziţiile 1.7.11 şi 1.7.20, pe care le-am numit complete deoarece, particularizate la cazul semihipergrupurilor sau la cel al grupurilor, dau chiar semihipergrupurile, respectiv hipergrupurile complete. Aceste rezultate sunt cuprinse în lucrarea [62].

În paragraful 1.8 am caracterizat cea mai mică relaţie de echivalenţă pe o multialgebră pentru care multialgebra factor este o algebră ce verifică o identitate dată $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ (Teorema 1.8.3). Am notat această relaţie cu $\alpha^*_{\mathbf{qr}}$. Fie $\mathfrak{B}$ o algebră universală, ρ o relaţie de echivalenţă pe B şi fie $\theta(\rho_{\mathbf{qr}})$ cea mai mică congruenţă pe $\mathfrak{B}$ care conţine pe ρ şi relaţia $\{(q(b_0,\ldots,b_{n-1}), r(b_0,\ldots,b_{n-1})) \mid b_0,\ldots,b_{n-1} \in B\}$. Rezultatul principal al paragrafului 1.8 (şi chiar al primului capitol) este Teorema 1.8.9 în care am arătat că algebrele universale $(\mathfrak{B}/\rho)/\alpha^*_{\mathbf{qr}}$ şi $\mathfrak{B}/\theta(\rho_{\mathbf{qr}})$ sunt izomorfe. În felul acesta, se confirmă, încă o dată, faptul că studiul multialgebrelor este o extindere naturală a teoriei algebrelor universale. Aceste rezultate sunt cuprinse într-un preprint realizat în colaborare cu domnul profesor Ioan Purdea ([66]).

1.1 Multialgebre. Definiţii. Cazuri particulare

Fie A o mulţime. Notăm cu $P^*(A)$ mulţimea submulţimilor nevide ale mulţimii A.

Definiţia 1.1.1. Fie n un număr natural. Se numeşte *multioperaţie* pe A de *aritate* n (sau *multioperaţie* n*-ară* pe A) o funcţie $A^n \to P^*(A)$.

Observaţia 1.1.1. Se observă că o multioperaţie nulară pe A pune în evidenţă o submulţime nevidă a mulţimii A, ceea ce înseamnă că există multioperaţii nulare pe A dacă şi numai dacă A este nevidă.

Fie $\tau = (n_\gamma)_{\gamma<o(\tau)} = (n_0, n_1, \ldots, n_\gamma, \ldots)$ un şir de numere naturale indexat după mulţimea de ordinale $\{\gamma \mid \gamma < o(\tau)\}$ şi fie, pentru fiecare $\gamma < o(\tau)$, câte un simbol $\mathbf{f}_\gamma$

de multioperaţie n_γ-ară.

Definiţia 1.1.2. O *multialgebră de tip* τ, $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$, constă dintr-o mulţime A şi o familie de multioperaţii $(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)} = (f_0, f_1, \ldots, f_\gamma, \ldots)$ în care fiecare f_γ este o multioperaţie n_γ-ară având simbolul $\mathbf{f}_\gamma$. Mulţimea A se numeşte *mulţime suport* a multialgebrei $\mathfrak{A}$.

Observaţia 1.1.2. Dacă multialgebra $\mathfrak{A}$ are multioperaţii nulare atunci mulţimea suport A este nevidă.

Desigur, identificând o mulţime cu un element cu elementul pe care îl conţine putem privi operaţiile pe o mulţime ca multioperaţii. Astfel, rezultă că algebrele universale sunt cazuri particulare de multialgebre.

Exemplul 1.1.3. [47] Fie $(G, \cdot)$ un grup, H un subgrup al său şi fie $G/H = \{xH \mid x \in G\}$ mulţimea claselor de echivalenţă la stânga determinate de H. Egalitatea $xH \cdot yH = (xy)H$ defineşte o operaţie pe G/H dacă şi numai dacă mulţimea $\{zH \mid z = x'y',\ x' \in xH,\ y' \in yH\}$ are un singur element, iar aceasta se întâmplă exact atunci când H este un subgrup normal al lui G. Cu alte cuvinte,

$$xH \cdot yH = \{zH \mid z = x'y',\ x' \in xH,\ y' \in yH\}$$

defineşte, în general, o multioperaţie binară pe G/H, deci organizează pe G/H ca o multialgebră de tip $\tau = (2)$.

Prezentăm in continuare câteva multialgebre particulare care vor apărea pe parcurs:

Hipergrupoid. O multialgebră $(H, \circ)$ cu o multioperaţie binară se numeşte *hipergrupoid*. Dacă $a, b \in H$, imaginea $a \circ b$ a perechii (a, b) prin multioperaţia $\circ$ se numeşte *hiperprodus*. Uneori vom folosi substantivul *hiperprodus* pentru a denumi multioperaţia binară dintr-un hipergrupoid. Dacă $A, B \subseteq H$ atunci

$$A \circ B = \bigcup \{a \circ b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Semihipergrup. Un hipergrupoid $(H, \circ)$ pentru care multioperaţia $\circ$ este asociativă, adică

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \text{ oricare ar fi } a, b, c \in H,$$

se numeşte *semihipergrup*. Dacă $a_1, \ldots, a_n \in H$, vom numi submulţimea nevidă $a_1 \circ \cdots \circ a_n$ a lui H, *hiperprodus cu n factori.*

Înlocuind mai sus asociativitatea lui $\circ$ cu condiţia

$$a \circ (b \circ c) \cap (a \circ b) \circ c \neq \emptyset \text{ oricare ar fi } a, b, c \in H,$$

numită *asociativitate slabă*, se obţine definiţia noţiunii de H_v*-semigrup*.

Hipergrup. Fie H o mulţime nevidă. Un semihipergrup $(H, \circ)$ pentru care

$$a \circ H = H \circ a = H \text{ oricare ar fi } a \in H, \tag{1.1.1}$$

se numeşte *hipergrup*. Un H_v-semigrup care satisface condiţia (1.1.1) se numeşte H_v*-grup*. Multialgebra din Exemplul 1.1.3 este un hipergrup.

Se observă că (1.1.1) face ca egalităţile

$$a/b = \{x \in H \mid a \in x \circ b\}, \ b\backslash a = \{x \in H \mid a \in b \circ x\} \tag{1.1.2}$$

să definească două multioperaţii binare pe H. Astfel, hipergrupurile şi H_v-grupurile pot fi privite ca multialgebre $(H, \circ, /, \backslash)$ de tip $\tau = (2, 2, 2)$. Să notăm, de asemenea, că dacă H este o mulţime nevidă şi $(H, \circ, /, \backslash)$ este o multialgebră de tip $\tau = (2, 2, 2)$ pentru care multioperaţia $\circ$ este asociativă (slab asociativă) şi pentru care multioperaţiile $/$ şi $\backslash$ se obţin din $\circ$ prin (1.1.2) atunci $(H, \circ)$ este un hipergrup (H_v-grup).

Hipergrup canonic. O mulţime nevidă H înzestrată cu o multioperaţie binară $+ : H \times H \to P^*(H)$ se numeşte *hipergrup canonic* dacă:

(i) $+$ este asociativă;

(ii) $+$ este comutativă: $a + b = b + a$, pentru orice $a, b \in H$;

(iii) există $0 \in H$ astfel încât $0 + a = a$, pentru orice $a \in H$;

(iv) pentru orice $a \in H$, există $-a \in H$ care verifică următoarea proprietate de reversibilitate: dacă $b, c \in H$ astfel încât $c \in a + b$ atunci $b \in (-a) + c$.

Menţionăm că multialgebra astfel obţinută este un hipergrup. Notăm, de asemenea, că 0 este unic cu proprietatea din enunţ, că $0 \in a + (-a)$, iar $-a$ este unic cu această proprietate, aşadar hipergrupurile canonice pot fi privite ca multialgebre $(H, +, /, \backslash, 0, -)$ cu $+, /, \backslash$ multioperaţii binare, 0 operaţie nulară şi $-$, operaţie unară.

Hiperinel (în sens general). Un *hiperinel în sens general* este o multialgebră $(R, +, \cdot)$ care verifică următoarele: $(R, +)$ este un hipergrup, $(R, \cdot)$ este un semihipergrup şi pentru orice $a, b, c \in R$ au loc incluziunile

$$a \cdot (b + c) \subseteq a \cdot b + a \cdot c,\ (b + c) \cdot a \subseteq b \cdot a + c \cdot a.$$

Dacă $/$ şi $\backslash$ sunt multioperaţiile ce se definesc pentru hipergrupul $(R, +)$ prin egalităţile (1.1.2) atunci hiperinelul R poate fi privit ca o multialgebră $(R, +, /, \backslash, \cdot)$ de tip $(2, 2, 2, 2)$, cu $+, \cdot$ multioperaţii asociative ce verifică incluziunile de mai sus.

Hiperinel Krasner. Un *hiperinel Krasner* $(A, +, \cdot, 0)$ constă într-o mulţime A, înzestrată cu două multioperaţii binare $+, \cdot$ care verifică următoarele proprietăţi:

i) $(A, +)$ este un hipergrup canonic cu elementul nul 0;

ii) $(A, \cdot)$ este un semigrup;

iii) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, oricare ar fi $a \in A$;

iv) operaţia $\cdot$ este distributivă faţă de multioperaţia $+$, adică pentru orice $a, b, c \in R$ avem $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Astfel un hiperinel Krasner poate fi privit ca o multialgebră $(A, +, /, \backslash, 0, -, \cdot)$ cu $+, /, \backslash$ multioperaţii binare şi $0, -, \cdot$ operaţii cu arităţile respectiv $0, 1, 2$.

Se constată uşor că semigrupurile sunt cazuri particulare de semihipergrupuri, grupurile, cazuri particulare de hipergrupuri, grupurile abeliene, de hipergrupuri canonice, iar inelele sunt cazuri particulare de hiperinele.

Să observăm, în încheierea acestui paragraf, că fiecare dintre multioperaţiile f_γ $(\gamma < o(\tau))$ ale unei multialgebre de tip τ poate fi privită ca o relaţie $n_\gamma + 1$-ară r_γ astfel:

$$(a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1}, a_{n_\gamma}) \in r_\gamma \Leftrightarrow a_{n_\gamma} \in f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1}). \tag{1.1.3}$$

Astfel, multialgebrele sunt sisteme relaţionale particulare, mai generale decât algebrele universale.

1.2 Algebra părţilor nevide ale unei multialgebre

O multialgebră $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ de tip τ determină o structură de algebră universală de tip τ pe $P^*(A)$ cu operaţiile definite prin:

$$f_\gamma(A_0, \ldots, A_{n_\gamma-1}) = \bigcup\{f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1}) \mid a_i \in A_i,\ i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\}, \tag{1.2.1}$$

pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi $A_0, \ldots, A_{n_\gamma-1} \in P^*(A)$. Notăm această algebră cu $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ şi o vom numi în continuare *algebra (universală a) părţilor nevide ale multialgebrei* $\mathfrak{A}$.

Observaţia 1.2.1. Să notăm că dacă A_i, B_i $(i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\})$ sunt submulţimi nevide ale mulţimii A cu proprietatea că $A_i \subseteq B_i$ atunci $f_\gamma(A_0, \ldots, A_{n_\gamma-1}) \subseteq f_\gamma(B_0, \ldots, B_{n_\gamma-1})$.

Fie n un număr natural şi fie algebra universală $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}) = (P^*(A), (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$. *Funcţiile algebrice n-are* ale algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ sunt acele şi numai acele funcţii care se obţin aplicând de un număr finit de ori următorii paşi:

(i) pentru orice $B \in P^*(A)$ funcţia $c_B^n : P^*(A)^n \to P^*(A)$, $c_B^n(X_0, \ldots, X_{n-1}) = B$ este funcţie algebrică n-ară pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$;

(ii) pentru orice $i \in \{0, \ldots, n - 1\}$ funcţia $e_i^n : P^*(A)^n \to P^*(A)$, $e_i^n(X_0, \ldots, X_{n-1}) = X_i$ este funcţie algebrică n-ară pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$;

(iii) dacă $\gamma < o(\tau)$ şi $p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1}$ sunt funcţii algebrice n-are ale algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ atunci funcţia $f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1}) : P^*(A)^n \to P^*(A)$ definită prin

$$f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(X_0, \ldots, X_{n-1}) = f_\gamma(p_0(X_0, \ldots, X_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(X_0, \ldots, X_{n-1}))$$

este, de asemenea, funcţie algebrică n-ară pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$.

Notăm cu $P^{(n)}_{P^*(A)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ mulţimea funcţiilor algebrice n-are ale algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$. Se observă că (iii) organizează mulţimea $P^{(n)}_{P^*(A)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ ca o algebră universală de tip τ,

$$\mathfrak{P}^{(n)}_{P^*(A)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})) = (P^{(n)}_{P^*(A)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})), (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)}).$$

Observaţia 1.2.2. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $p \in P^{(n)}_{P^*(A)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$, iar submulţimile nevide $A_0, \ldots, A_{n-1}$ şi $B_0, \ldots, B_{n-1}$ ale mulţimii A sunt astfel încât $A_0 \subseteq B_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq B_{n-1}$ atunci

$$p(A_0, \ldots, A_{n-1}) \subseteq p(B_0, \ldots, B_{n-1}).$$

Într-adevăr, dacă există $B \in P^*(A)$ astfel încât $p = c_B^n$ atunci incluziunea de mai sus se scrie $B \subseteq B$ şi este, în mod trivial, adevărată. Dacă există $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ astfel ca $p = e_i^n$ atunci incluziunea de mai sus devine $A_i \subseteq B_i$ şi este adevărată conform ipotezei în care lucrăm. Presupunând că afirmaţia din enunţ este verificată pentru funcţiile algebrice $p_0, \ldots, p_{n_\gamma - 1} \in P_{P^*(A)}^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi că $p = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})$, folosind Observaţia 1.2.1 avem

$$\begin{aligned}
p(A_0, \ldots, A_{n-1}) &= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(A_0, \ldots, A_{n-1}) \\
&= f_\gamma(p_0(A_0, \ldots, A_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(A_0, \ldots, A_{n-1})) \\
&\subseteq f_\gamma(p_0(B_0, \ldots, B_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(B_0, \ldots, B_{n-1})) \\
&= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(B_0, \ldots, B_{n-1}) \\
&= p(B_0, \ldots, B_{n-1}).
\end{aligned}$$

În algebra $\mathfrak{P}_{P^*(A)}^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ considerăm subalgebra $\mathfrak{P}^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ generată de funcţiile e_i^n, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Algebra

$$\mathfrak{P}^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})) = (P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})), (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$$

se numeşte *algebra polinoamelor n-are* ale algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$. Elementele mulţimii $P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ se numesc *polinoame n-are* pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$. Rezultă imediat că polinoamele n-are pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ sunt acele şi numai acele funcţii $P^*(A)^n \to P^*(A)$ care se obţin aplicând (ii) şi (iii) de mai sus de un număr finit de ori. Menţionăm că algebra $\mathfrak{P}^{(0)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ există dacă şi numai dacă între multioperaţiile multialgebrei $\mathfrak{A}$ există multioperaţii nulare.

Notăm, pentru orice $a \in A$, funcţia algebrică $c_{\{a\}}^n$ cu c_a^n şi cu

$$\mathfrak{P}_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})) = (P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})), (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$$

subalgebra algebrei funcţiilor algebrice n-are pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ generată de submulţimea

$$\{c_a^n \mid a \in A\} \cup \{e_i^n \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}.$$

Cu alte cuvinte, elementele mulţimii $P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ sunt acele şi numai acele funcţii $P^*(A)^n \to P^*(A)$ care se obţin aplicând de un număr finit de ori următorii paşi:

(i') pentru orice $a \in A$, funcţia c_a^n este element al mulţimii $P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$;

(ii') pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ funcţia e_i^n, este element al mulţimii $P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$;

(iii') dacă $\gamma < o(\tau)$ şi $p_0, \ldots, p_{n_\gamma - 1}$ sunt elemente ale mulţimii $P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ atunci funcţia $f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1}) : P^*(A)^n \to P^*(A)$ definită ca în (iii) este, de asemenea, element al mulţimii $P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$.

Observaţia 1.2.3. E clar că, pentru o multialgebră $\mathfrak{A}$, $P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ este o subalgebră a algebrei $\mathfrak{P}_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$.

Observaţia 1.2.4. Dacă $\mathfrak{A}$ este o algebră universală şi $\mathfrak{P}_A^{(n)}(\mathfrak{A})$ este algebra funcţiilor algebrice n-are ale algebrei $\mathfrak{A}$ atunci pentru orice funcţie algebrică $p \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ corespondenţa

$$A^n \to A,\ (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto p(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

defineşte o funcţie algebrică din $\mathfrak{P}_A^{(n)}(\mathfrak{A})$ (adică o funcţie algebrică n-ară pe $\mathfrak{A}$). Mai mult, orice funcţie algebrică din $\mathfrak{P}_A^{(n)}(\mathfrak{A})$ se obţine astfel dintr-o funcţie algebrică din $P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$.

Funcţiile algebrice unare din $P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ vor constitui instrumente deosebit de utile în acest capitol. Este bine să notăm următorul fapt:

Observaţia 1.2.5. Dacă $f \in P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $p \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ atunci $f \circ p \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$.

Într-adevăr, $f \circ p : P^*(A)^n \to P^*(A)$ şi avem:

(i) dacă există $a \in A$ astfel ca $f = c_a^1$ şi $X_0, \ldots, X_{n-1} \in P^*(A)$ atunci

$$(f \circ p)(X_0, \ldots, X_{n-1}) = c_a^1(p(X_0, \ldots, X_{n-1})) = a = c_a^n(X_0, \ldots, X_{n-1}),$$

de unde rezultă $f \circ p = c_a^n \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$;

(ii) dacă $f = e_0^1$ şi $X_0, \ldots, X_{n-1} \in P^*(A)$ atunci

$$(f \circ p)(X_0, \ldots, X_{n-1}) = e_0^1(p(X_0, \ldots, X_{n-1})) = p(X_0, \ldots, X_{n-1}),$$

adică $f \circ p = p$;

(iii) dacă $\gamma < o(\tau)$ şi pentru $f^0, \ldots, f^{n_\gamma - 1} \in P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ s-a demonstrat că

$$f^0 \circ p = p_0 \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})), \ldots, f^{n_\gamma - 1} \circ p = p_{n_\gamma - 1} \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$$

atunci pentru $f = f_\gamma(f^0, \ldots, f^{n_\gamma - 1})$ avem

$$\begin{aligned}(f \circ p)(X_0, \ldots, X_{n-1}) &= f(p(X_0, \ldots, X_{n-1})) = f_\gamma(f^0, \ldots, f^{n_\gamma-1})(p(X_0, \ldots, X_{n-1}))\\ &= f_\gamma(f^0(p(X_0, \ldots, X_{n-1})), \ldots, f^{n_\gamma-1}(p(X_0, \ldots, X_{n-1})))\\ &= f_\gamma(p_0(X_0, \ldots, X_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(X_0, \ldots, X_{n-1}))\\ &= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(X_0, \ldots, X_{n-1}),\end{aligned}$$

aşadar $f \circ p = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma - 1}) \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$.

Fie $n \in \mathbb{N}$. Pornind de la familia de simboluri de operaţii $(\mathbf{f}_\gamma)_{\gamma < o(\tau)}$ şi de la simbolurile $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$ se construieşte algebra simbolurilor polinomiale n-are.

Definiţia 1.2.1. *Simbolurile polinomiale n-are* sunt acele şi numai acele şiruri de simboluri care se obţin aplicând de un număr finit de ori următorii paşi:

(a) $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$ sunt simboluri polinomiale n-are;

(b) dacă luăm un ordinal $\gamma < o(\tau)$ şi $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1}$ simboluri polinomiale n-are atunci $\mathbf{f}_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1})$ este, de asemenea, un simbol polinomial n-ar.

Notăm cu $\mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ mulţimea simbolurilor polinomiale n-are. Se observă că pentru orice $\gamma < o(\tau)$ egalitatea

$$f_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1}) = \mathbf{f}_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1})$$

defineşte o operaţie n_γ-ară pe mulţimea $\mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Astfel, se obţine *algebra* $\mathfrak{P}^{(n)}(\tau)$ a *simbolurilor polinomiale n-are.* Algebra $\mathfrak{P}^{(0)}(\tau)$ există dacă şi numai dacă există $\gamma < o(\tau)$ astfel încât $\mathbf{f}_\gamma$ să fie simbol al unei multioperaţii nulare.

Menţionăm că terminologia folosită aici, ca şi cea mai mare parte a notaţiilor, este preluată din [29] deoarece ea permite o traducere mai bună în limba română. În cărţi mai recente de algebre universale (ca, de exemplu, [6]) noţiunea de simbol polinomial (în limba engleză „*polynomial symbol*") apare (tot în limba engleză) sub denumirea „*term*", iar noţiunea de polinom („*polynomial*") sub numele „*term function*". Termenul „*funcţie algebrică*" este înlocuit în [6] de „*funcţie polinomială*". Definiţia prezentată anterior pentru funcţii algebrice este cea inspirată din [6]. Amintim că în [29] introducerea funcţiilor algebrice se face pornind de la polinoame. Astfel, o *funcţie algebrică* de aritate $n - k$ se obţine prin fixarea într-un polinom n-ar a k variabile prin elemente din algebra universală peste care lucrăm, in cazul nostru $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$.

Definiţia 1.2.2. *Polinomul* n-ar al algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ *asociat unui* (*indus de un*) *simbol polinomial* n-ar se defineşte astfel:

(1) pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ simbolul polinomial $\mathbf{x}_i$ induce polinomul e_i^n;

(2) dacă luăm un ordinal $\gamma < o(\tau)$ şi simbolurile polinomiale $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1}$ induc, respectiv, polinoamele $p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1}$ atunci simbolul polinomial $\mathbf{f}_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1})$ induce polinomul $f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})$.

Observaţia 1.2.6. [29, Corolarul 8.1] Orice polinom n-ar p al algebrei $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ este indus de un simbol polinomial n-ar $\mathbf{p}$.

Notaţie. Polinomul indus de simbolul polinomial $\mathbf{p}$ pe algebra $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ va fi notat cu p (sau cu $(\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})}$ atunci când e necesar).

Din Definiţia 1.2.2 şi Observaţia 1.2.6 se obţin următoarele observaţii:

Observaţia 1.2.7. [29, Corolarul 8.2] Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, orice polinom $p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ există un polinom $q \in P^{(m)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ cu proprietatea că

$$p(A_0, \ldots, A_{n-1}) = q(A_0, \ldots, A_{m-1})$$

pentru orice $A_0, \ldots, A_{m-1} \in P^*(A)$.

Observaţia 1.2.8. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, orice polinom $p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi orice permutare σ a mulţimii $\{0, \ldots, n-1\}$ există un polinom $q \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ cu proprietatea că

$$p(A_0, \ldots, A_{n-1}) = q(A_{\sigma(0)}, \ldots, A_{\sigma(n-1)})$$

pentru orice $A_0, \ldots, A_{n-1} \in P^*(A)$.

Fie $\mathfrak{A}$ o multialgebră şi fie $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ algebra părţilor sale nevide. O submulţime nevidă $C \subseteq A$ se numeşte *constantă algebrică* pentru $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ dacă există $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(0)}(\tau)$ astfel încât $C = (\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})}$.

1.3 Laticea submultialgebrelor. Submultialgebra generată

Definiţia 1.3.1. Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ o multialgebră şi fie $B \subseteq A$. Vom spune că B este o *submultialgebră* a multialgebrei $\mathfrak{A}$ dacă pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi pentru orice elemente $b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1} \in B$, $f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1}) \subseteq B$.

Observaţia 1.3.1. Dacă B este o submultialgebră a multialgebrei $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ atunci, pentru orice $\gamma < o(\tau)$, multioperaţia $f_\gamma : A^{n_\gamma} \to P^*(A)$ induce o multioperaţie $f_\gamma|_{B^{n_\gamma}} : B^{n_\gamma} \to P^*(B)$. Mulţimea B împreună cu multioperaţiile $f_\gamma|_{B^{n_\gamma}}$ formează o multialgebră $\mathfrak{B}$ de tip τ.

Notaţii. Notăm cu $S(\mathfrak{A})$ mulţimea submultialgebrelor multialgebrei $\mathfrak{A}$, iar pentru o submultialgebră B, o multioperaţie $f_\gamma|_{B^{n_\gamma}}$ a multialgebrei $\mathfrak{B}$ se va nota tot cu f_γ.

Exemplul 1.3.2. Fie $(H, \circ)$ un hipergrupoid. $S \subseteq H$ este un *subhipergrupoid* al lui H dacă S este o submultialgebră pentru $(H, \circ)$, adică pentru orice $a, b \in S$ avem $a \circ b \in S$. Un subhipergrupoid al unui semihipergrup se numeşte *subsemihipergrup*.

Observaţia 1.3.3. Dacă H este un hipergrup şi $S \subseteq H$ este o mulţime nevidă, atunci S se numeşte *subhipergrup* dacă S este un subsemihipergrup în semihipergrupul $(H, \circ)$ (adică $S \circ S \subseteq S$) şi $a \circ S = S \circ a = S$, pentru orice $a \in S$. Un *subhipergrup* S al lui H este *închis la dreapta (stânga)* dacă pentru $a \in H$, $b, c \in S$, din $c \in b \circ a$ ($c \in a \circ b$) rezultă $a \in S$. Un *subhipergrup* este *închis* dacă este închis şi la stânga şi la dreapta. Astfel, dacă privim hipergrupul H ca pe o multialgebră $(H, \circ, /, \backslash)$ atunci submultialgebrele care au ca suport submulţimi nevide sunt chiar subhipergrupurile închise. Menţionăm că mulţimea $S(H, \circ, /, \backslash)$ a submultialgebrelor multialgebrei $(H, \circ, /, \backslash)$ se obţine reunind la mulţimea subhipergrupurilor închise ale lui H mulţimea formată din mulţimea vidă.

Teorema 1.3.4. *[67, Teorema 3] Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ o multialgebră de tip τ şi fie $B \subseteq A$. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca $P^*(B)$ să fie o subalgebră în $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ este ca B să fie o submultialgebră în $\mathfrak{A}$.*

Corolarul 1.3.5. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ o multialgebră de tip τ, B o submultialgebră a lui $\mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$. Dacă $B_0, \ldots, B_{n-1}$ sunt submulţimi nevide ale lui B atunci $p(B_0, \ldots, B_{n-1}) \subseteq B$.*

Corolarul 1.3.6. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ o multialgebră de tip τ, B o submultialgebră a lui $\mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$. Dacă $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ atunci $p(b_0, \ldots, b_{n-1}) \subseteq B$.*

În [33, Lema 1] este prezentat următorul rezultat (chiar într-un caz mai general corespunzător unei multialgebre în care multioperaţiile nu sunt neapărat finitare):

Lema 1.3.7. *Mulţimea $S(\mathfrak{A})$ formează un sistem de închidere algebric pe A.*

Corolarul 1.3.8. *$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = (S(\mathfrak{A}), \subseteq)$ este o latice algebrică.*

Corolarul 1.3.9. *Dacă $X \subseteq A$, atunci $\langle X \rangle = \bigcap \{B \in S(\mathfrak{A}) \mid X \subseteq B\}$ este o submultialgebră a multialgebrei $\mathfrak{A}$.*

Definiţia 1.3.2. Submultialgebra $\langle X\rangle$ a multialgebrei $\mathfrak{A}$ se numeşte *submultialgebra generată de submulţimea* X.

Observaţia 1.3.10. $B \in S(\mathfrak{A})$ dacă şi numai dacă $\langle B\rangle = B$.

Observaţia 1.3.11. $\langle\emptyset\rangle = \emptyset$ dacă şi numai dacă $\mathfrak{A}$ nu are multioperaţii nulare.

Observaţia 1.3.12. Dacă $\mathfrak{A}$ are multioperaţii nulare şi A_0 este reuniunea mulţimilor puse în evidenţă de acestea, atunci $\emptyset \neq \langle\emptyset\rangle = \langle A_0\rangle$ este cea mai mică submultialgebră din $(S(\mathfrak{A}), \subseteq)$.

În continuare vom prezenta forma submultialgebrei unei multialgebre $\mathfrak{A}$ generată de o submulţime $X \subseteq A$.

Teorema 1.3.13. *Fie* $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ *o multialgebră de tip* τ, $X \subseteq A$. *Atunci* $a \in \langle X\rangle$ *dacă şi numai dacă există* $n \in \mathbb{N},\ p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ *şi* $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$ *astfel încât*

$$a \in p(x_0, \ldots, x_{n-1}).$$

Demonstraţie. Notăm

$$M = \bigcup\{p(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N},\ p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})),\ x_0, \ldots, x_{n-1} \in X\}.$$

Oricare ar fi $x \in X$ avem $x = e_0^1(x)$, deci $x \in M$ şi astfel $X \subseteq M$. De asemenea, ţinând cont de Corolarul 1.3.6, avem faptul că $M \subseteq \langle X\rangle$.

Să arătăm acum că $M \in S(\mathfrak{A})$. Fie $\gamma < o(\tau)$ şi $c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1} \in M$. Aceasta înseamnă că există $m_i \in \mathbb{N},\ p_i \in P^{(m_i)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})),\ x_0^i, \ldots, x_{m_i-1}^i \in X,\ i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ astfel încât $c_i \in p_i(x_0^i, \ldots, x_{m_i-1}^i)$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Fie $m = m_0 + \cdots + m_{n_\gamma-1}$ şi fie $y_0, \ldots, y_{m-1} \in X$ elementele $x_0^0, \ldots, x_{m_0-1}^0, \ldots, x_0^{n_\gamma-1}, \ldots, x_{m_{n_\gamma-1}-1}^{n_\gamma-1}$, respectiv. Folosind Observaţiile 1.2.7 şi 1.2.8 deducem că există polinoamele $q_0, \ldots, q_{n_\gamma-1} \in P^{(m)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ astfel încât $p_i(x_0^i, \ldots, x_{m_i-1}^i) = q_i(y_0, \ldots, y_{m-1})$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Aşadar, pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, $c_i \in q_i(y_0, \ldots, y_{m-1})$şi avem:

$$\begin{aligned} f_\gamma(c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1}) \subseteq f_\gamma(q_0(y_0, \ldots, y_{m-1}), \ldots, q_{n_\gamma-1}(y_0, \ldots, y_{m-1})) = \\ = f_\gamma(q_0, \ldots, q_{n_\gamma-1})(y_0, \ldots, y_{m-1}), \end{aligned}$$

iar cum $f_\gamma(q_0, \ldots, q_{n_\gamma-1}) \in P^{(m)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $y_0, \ldots, y_{m-1} \in X$ rezultă că

$$f_\gamma(c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1}) \subseteq M,$$

ceea ce încheie demonstraţia teoremei. $\square$

Observaţia 1.3.14. Dacă $\mathfrak{A}$ are multioperaţii nulare, atunci $\langle\emptyset\rangle = \langle A_0\rangle$ este reuniunea mulţimilor ce sunt constante algebrice pentru $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$.

1.4 Omomorfisme de multialgebre

Având în vedere definiţia noţiunii de multialgebră, generalizarea noţiunii de omomorfism întâlnită la algebre universale se poate face în mai multe moduri. Poate cel mai natural mod de a defini un omomorfism ar fi cel care se obţine privind multialgebrele ca sisteme relaţionale.

Definiţia 1.4.1. Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ şi $\mathfrak{B} = (B, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ două multialgebre de acelaşi tip τ. O funcţie $h : A \to B$ se numeşte *omomorfism* între multialgebrele $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ dacă pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi pentru orice elemente $a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1} \in A$ avem

$$h(f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1})) \subseteq f_\gamma(h(a_0), \ldots, h(a_{n_\gamma-1})). \tag{1.4.1}$$

Cu alte cuvinte această definiţie exprimă faptul că h este un omomorfism între sistemele relaţionale care se obţin din multialgebrele $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ aşa cum s-a văzut la sfârşitul primului paragraf.

Se va constata că, adesea, omomorfismele cu care lucrăm sunt omomorfisme pentru care în relaţia (1.4.1) avem egalitate. Preluând terminologia din [67], vom numi un astfel de omomorfism, *omomorfism ideal*. Precizăm că, spre deosebire de [67], nu vom cere în definiţie, surjectivitatea omomorfismului ideal. Omomorfismele ideale sunt numite în [75] *omomorfisme relaţionale* – termen pe care nu îl vom folosi pentru a nu crea confuzie cu noţiunea de omomorfism între sisteme relaţionale – iar în [90], *omomorfisme strânse* („*tight homomorphisms*”).

Observaţia 1.4.1. Orice omomorfism de multialgebre cu codomeniul algebră universală este un omomorfism ideal.

Exemplul 1.4.2. O aplicaţie $h : H \to H'$ între doi hipergrupoizi $(H, \circ)$ şi $(H', \circ)$ este omomorfism dacă pentru orice $a, b \in H$ avem $h(a \circ b) \subseteq h(a) \circ h(b)$. Un omomorfism de hipergrupoizi este ideal dacă pentru orice $a, b \in H$ avem $h(a \circ b) = h(a) \circ h(b)$. Un omomorfism ideal de hipergrupoizi se mai numeşte *omomorfism bun* (vezi [10, Definiţia 14]).

Observaţia 1.4.3. Dacă H şi H' sunt hipergrupuri şi le privim ca multialgebre cu trei multioperaţii binare atunci un omomorfism între hipergrupoizii $(H,\circ)$ şi $(H',\circ)$ este un omomorfism între multialgebrele $(H,\circ,/,\backslash)$ şi $(H',\circ,/,\backslash)$. Un omomorfism ideal h între cele două multialgebre este un omomorfism bun cu proprietatea că $h(a/b)=h(a)/h(b)$, $h(a\backslash b)=h(a)\backslash h(b)$, pentru orice $a,b\in H$. Un astfel de omomorfism de hipergrupuri se numeşte *omomorfism foarte bun* (vezi [10, Definiţia 21]).

Definiţia 1.4.2. Fie $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ două multialgebre de acelaşi tip. O funcţie bijectivă $h:A\to B$ cu proprietatea că h şi h^{-1} sunt omomorfisme între multialgebrele $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ se numeşte *izomorfism.*

Observaţia 1.4.4. Un omomorfism bijectiv de multialgebre este izomorfism dacă şi numai dacă este omomorfism ideal.

Într-adevăr, dacă $h:A\to B$ este un izomorfism între multialgebrele $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ atunci pentru orice $\gamma<o(\tau)$ şi orice elemente $a_0,\dots,a_{n_\gamma-1}\in A$ luăm $b_0=h(a_0),\dots,b_{n_\gamma-1}=h(a_{n_\gamma-1})$, iar din $h^{-1}(f_\gamma(b_0,\dots,b_{n_\gamma-1}))\subseteq f_\gamma(h^{-1}(b_0),\dots,h^{-1}(b_{n_\gamma-1}))$ rezultă, prin aplicarea lui h, incluziunea $f_\gamma(h(a_0),\dots,h(a_{n_\gamma-1}))\subseteq h(f_\gamma(a_0,\dots,a_{n_\gamma-1}))$, aşadar h este ideal. Reciproc, dacă h este un omomorfism ideal bijectiv, atunci, pentru orice elemente $b_0,\dots,b_{n_\gamma-1}\in B$ există $a_0,\dots,a_{n_\gamma-1}\in A$ astfel încât $b_0=h(a_0),\dots,b_{n_\gamma-1}=h(a_{n_\gamma-1})$, iar din faptul că $f_\gamma(h(a_0),\dots,h(a_{n_\gamma-1}))\subseteq h(f_\gamma(a_0,\dots,a_{n_\gamma-1}))$ deducem, prin aplicarea lui h^{-1}, că $h^{-1}(f_\gamma(b_0,\dots,b_{n_\gamma-1}))\subseteq f_\gamma(a_0,\dots,a_{n_\gamma-1})=f_\gamma(h^{-1}(b_0),\dots,h^{-1}(b_{n_\gamma-1}))$, deci şi h^{-1} este omomorfism.

Definiţia 1.4.3. Fie $\mathfrak{A}=(A,(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ o multialgebră şi fie ρ o relaţie de echivalenţă pe A. Relaţia ρ se numeşte *echivalenţă ideală* pe $\mathfrak{A}$ dacă pentru orice $\gamma<o(\tau)$ şi pentru orice elemente $x_i,y_i\in A$ cu proprietatea că $x_i\rho y_i$ pentru toţi $i\in\{0,\dots,n_\gamma-1\}$ avem

$$a\in f_\gamma(x_0,\dots,x_{n_\gamma-1})\Rightarrow \exists b\in f_\gamma(y_0,\dots,y_{n_\gamma-1}) \text{ astfel încât } a\rho b.$$

Să considerăm A o mulţime şi $P^*(A)$ mulţimea părţilor sale nevide. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe A şi să considerăm relaţia $\overline{\rho}$ definită pe $P^*(A)$ astfel:

$$A\overline{\rho}B \Leftrightarrow \forall a\in A,\ \exists b\in B \text{ astfel încât } a\rho b \text{ şi } \forall b\in B,\ \exists a\in A \text{ astfel încât } a\rho b.$$

Se observă imediat că $\overline{\rho}$ este o echivalenţă pe $P^*(A)$.

Teorema 1.4.5. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ o multialgebră şi ρ o relaţie de echivalenţă pe A. Relaţia ρ este echivalenţă ideală pe multialgebra $\mathfrak{A}$ dacă şi numai dacă relaţia $\overline{\rho}$ este congruenţă pe algebra $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$.*

Demonstraţie. Fie ρ o echivalenţă ideală pe $\mathfrak{A}$. Să considerăm $\gamma < o(\tau)$ şi $X_i, Y_i \subseteq A$ nevide ($i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$) astfel încât $X_i \overline{\rho} Y_i$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Atunci pentru orice $a \in f_\gamma(X_0, \ldots, X_{n_\gamma-1})$, există $x_0 \in X_0, \ldots, x_{n_\gamma-1} \in X_{n_\gamma-1}$ astfel încât $a \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1})$. Conform cu definiţia lui $\overline{\rho}$ avem că există $y_0 \in Y_0, \ldots, y_{n_\gamma-1} \in Y_{n_\gamma-1}$ astfel încât $x_i \rho y_i$, pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Dar ρ este ideală, rezultă că există

$$b \in f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma-1}) \subseteq f_\gamma(Y_0, \ldots, Y_{n_\gamma-1})$$

astfel încât $a \rho b$. Analog se arată că pentru orice element $b \in f_\gamma(Y_0, \ldots, Y_{n_\gamma-1})$ există $a \in f_\gamma(X_0, \ldots, X_{n_\gamma-1})$ astfel încât $a \rho b$. Avem, deci,

$$f_\gamma(X_0, \ldots, X_{n_\gamma-1}) \overline{\rho} f_\gamma(Y_0, \ldots, Y_{n_\gamma-1})$$

şi astfel am demonstrat că $\overline{\rho}$ este o relaţie de congruenţă pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$.

Reciproc, considerăm $\gamma < o(\tau)$ şi $x_i, y_i \in A$ ($i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$) astfel încât $x_i \rho y_i$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Atunci, evident $\{x_i\} \overline{\rho} \{y_i\}$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, iar cum $\overline{\rho}$ este o congruenţă pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$, rezultă că

$$f_\gamma(\{x_0\}, \ldots, \{x_{n_\gamma-1}\}) \overline{\rho} f_\gamma(\{y_0\}, \ldots, \{y_{n_\gamma-1}\}).$$

Deducem de aici că pentru orice $a \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1})$ există $b \in f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma-1})$ astfel încât $a \rho b$, deci ρ este echivalenţă ideală pe $\mathfrak{A}$. □

Corolarul 1.4.6. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ o multialgebră, ρ o echivalenţă ideală pe $\mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$. Dacă submulţimile nevide $X_i, Y_i \subseteq A$ au proprietatea că $X_i \overline{\rho} Y_i$ ($i \in \{0, \ldots, n - 1\}$) atunci*

$$p(X_0, \ldots, X_{n-1}) \overline{\rho} p(Y_0, \ldots, Y_{n-1}).$$

Propoziţia 1.4.7. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ o multialgebră şi fie ρ o relaţie de echivalenţă pe A. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) ρ este o echivalenţă ideală pe $\mathfrak{A}$;

(b) pentru orice $\gamma < o(\tau)$ *şi pentru orice elemente* $x_i, y_i \in A$ *cu proprietatea că* $x_i \rho y_i$ *pentru orice* $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ *avem*

$$f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) \overline{\rho} f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1});$$

(c) pentru orice $\gamma < o(\tau)$*, orice elemente* $a, b, x_i \in A$ $(i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\})$ *cu proprietatea că* $a \rho b$ *avem*

$$f_\gamma(x_0, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) \overline{\rho} f_\gamma(x_0, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\gamma - 1})$$

pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$.

(d) pentru orice $n \in \mathbb{N}$*, orice* $p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ *şi orice elemente* $x_i, y_i \in A$ *cu* $x_i \rho y_i$ $(i \in \{0, \ldots, n - 1\})$ *avem*

$$p(x_0, \ldots, x_{n-1}) \overline{\rho} p(y_0, \ldots, y_{n-1}).$$

Demonstraţie. Implicaţia (a)⇒(d) se obţine din Corolarul 1.4.6. Sunt evidente implicaţiile (d)⇒(c) şi (b)⇒(a) (cea din urmă a fost surprinsă şi în demonstraţia Teoremei 1.4.5).

(c)⇒(b) Dacă $\gamma < o(\tau)$ şi $x_i, y_i \in A$, $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ sunt ca în ipoteza de la (b) atunci aplicând (c) avem succesiv:

$$\begin{gathered}
f_\gamma(x_0, x_1, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) \overline{\rho} f_\gamma(y_0, x_1, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) \\
f_\gamma(y_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) \overline{\rho} f_\gamma(y_0, y_1, x_2, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) \\
\vdots \\
f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1}, x_{n_\gamma - 1}) \overline{\rho} f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1}, y_{n_\gamma - 1}),
\end{gathered}$$

iar faptul că $\overline{\rho}$ este tranzitivă ne duce la concluzia dorită. □

Exemplul 1.4.8. Fie $(H, \circ)$ un hipergrupoid. O echivalenţă ρ a mulţimii H este echivalenţă ideală pentru $(H, \circ)$ dacă şi numai dacă pentru orice $a, b, x \in H$ pentru care $a \rho b$ avem $a \circ x \overline{\rho} b \circ x$ şi $x \circ a \overline{\rho} x \circ b$. O astfel de echivalenţă a unui hipergrupoid se numeşte *echivalenţă regulată* (vezi [10, Definiţia 8]).

Propoziţia 1.4.9. *Fie* $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ *şi* $\mathfrak{B} = (B, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ *două multialgebre de acelaşi tip* τ, $h : A \to B$ *un omomorfism,* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $p \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. *Atunci pentru orice elemente* $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ *avem*

$$h(p(a_0, \ldots, a_{n-1})) \subseteq p(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})).$$

Demonstraţie. Vom face o inducţie după paşii de construcţie a unui simbol polinomial.
Pasul 1. Dacă $\mathbf{p} = \mathbf{x}_i$ $(i \in \{0, \ldots, n-1\})$ atunci

$$\begin{aligned} h(p(a_0, \ldots, a_{n-1})) &= h(e_i^n(a_0, \ldots, a_{n-1})) = h(a_i) \\ &= e_i^n(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})) \\ &= p(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})). \end{aligned}$$

Pasul 2. Presupunând afirmaţia verificată pentru $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi considerând $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1})$ avem:

$$\begin{aligned} h(p(a_0, \ldots, a_{n-1})) &= h(f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(a_0, \ldots, a_{n-1})) \\ &= h(f_\gamma(p_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(a_0, \ldots, a_{n-1}))) \\ &= h(\bigcup\{f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1}) \mid b_i \in p_i(a_0, \ldots, a_{n-1}),\ i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\}) \\ &= \bigcup\{h(f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1})) \mid b_i \in p_i(a_0, \ldots, a_{n-1}),\ i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\} \\ &\subseteq \bigcup\{f_\gamma(h(b_0), \ldots, h(b_{n_\gamma-1})) \mid b_i \in p_i(a_0, \ldots, a_{n-1}),\ i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\}. \end{aligned}$$

Dar, pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, din $b_i \in p_i(a_0, \ldots, a_{n-1})$ rezultă că

$$h(b_i) \in h(p_i(a_0, \ldots, a_{n-1})) \subseteq p_i(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))).$$

Astfel,

$$\begin{aligned} h(p(a_0, \ldots, a_{n-1})) &\subseteq f_\gamma(p_0(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})), \ldots, p_{n_\gamma-1}(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))) \\ &= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})) \\ &= p(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})) \end{aligned}$$

ceea ce finalizează demonstraţia. $\square$

Remarcăm că pentru o multialgebră dată $\mathfrak{A}$ şi o echivalenţă ρ pe A egalităţile:

$$f_\gamma(\rho\langle a_0\rangle,\ldots,\rho\langle a_{n_\gamma-1}\rangle)=\{\rho\langle b\rangle\mid b\in f_\gamma(b_0,\ldots,b_{n_\gamma-1}),\ a_i\rho b_i,\ i\in\{0,\ldots,n_\gamma-1\}\},$$

fiind independente de alegerea reprezentanţilor $a_0,\ldots,a_{n_\gamma-1}$, definesc multioperaţii pe A/ρ, deci înzestrează mulţimea A/ρ a claselor de echivalenţă $\rho\langle a\rangle$ ale elementelor $a\in A$, cu o structură de multialgebră $\mathfrak{A}/\rho$, pe care o numim *multialgebra cât* sau *factor* determinată de ρ. Proiecţia canonică $\pi_\rho : A\to A/\rho$, $\pi_\rho(a)=\rho\langle a\rangle$ este un omomofism de multialgebre.

Un caz particular important al acestei construcţii se obţine atunci când $\mathfrak{A}$ este o algebră universală. Diferite proprietăţi ale multialgebrei cât astfel obţinute vor fi studiate în paragraful 1.5. Dacă, în plus, relaţia ρ este o congruenţă pe $\mathfrak{A}$ atunci multialgebra factor obţinută este chiar algebra factor (cât) $\mathfrak{A}/\rho$.

Aplicând Propoziţia 1.4.9 pentru proiecţia canonică $\pi_\rho : A\to A/\rho$ avem:

$$\{\rho\langle a\rangle\mid a\in(\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})}(a_0,\ldots,a_{n-1})\}\subseteq(\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}/\rho)}(\rho\langle a_0\rangle,\ldots,\rho\langle a_{n-1}\rangle)\tag{1.4.2}$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{p}\in\mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi $a_0,\ldots,a_{n-1}\in A$.

Observaţia 1.4.10. Incluziunea (1.4.2) se menţine dacă înlocuim polinoamele n-are $(\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})}$ şi $(\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}/\rho)}$ cu funcţiile algebrice n-are $p\in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi, respectiv, $p'\in P_{A/\rho}^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}/\rho))$, unde funcţia algebrică p' care corespunde lui p este definită după cum urmează:

(i) dacă $p=c_a^n$ atunci $p'=c_{\rho\langle a\rangle}^n$;

(ii) dacă $p=e_i^n=(\mathbf{x}_i)_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})}$ atunci $p'=e_i^n=(\mathbf{x}_i)_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}/\rho)}$;

(iii) dacă $p=f_\gamma(p_0,\ldots,p_{n_\gamma-1})$ şi funcţiile care corespund la $p_0,\ldots,p_{n_\gamma-1}\in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ sunt, respectiv, $p'_0,\ldots,p'_{n_\gamma-1}\in P_{A/\rho}^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}/\rho))$ atunci $p'=f_\gamma(p'_0,\ldots,p'_{n_\gamma-1})$.

Cum funcţia algebrică p' este obţinută parcurgând aceiaşi paşi ca în construcţia lui p, cu modificări importante doar la pasul (i), vom scrie p în loc de p' şi în consecinţă avem:

$$\{\rho\langle a\rangle\mid a\in p(a_0,\ldots,a_{n-1})\}\subseteq p(\rho\langle a_0\rangle,\ldots,\rho\langle a_{n-1}\rangle).\tag{1.4.3}$$

Un alt motiv al folosirii termenului de omomorfism ideal pentru acele omomorfisme pentru care în (1.4.1) avem egalitate este legătura acestora cu echivalenţele ideale:

Teorema 1.4.11. *[67, Teorema 1] Fie $\mathfrak{A}$ o multialgebră de tip τ. Dacă ρ o echivalenţă ideală pe $\mathfrak{A}$ atunci aplicaţia naturală $\pi_\rho : A \to A/\rho$ este un omomorfism ideal. Reciproc, dacă $h : A \to B$ un omomorfism ideal între multialgebrele $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ de acelaşi tip atunci relaţia $\rho_h = \{(x, y) \in A \times A \mid h(x) = h(y)\}$ este o echivalenţă ideală pe $\mathfrak{A}$. Mai mult, aplicaţia $h(a) \mapsto \pi_{\rho_h}(a)$ este un izomorfism între multialgebrele $h(\mathfrak{A})$ şi $\mathfrak{A}/\rho_h$.*

Considerăm un omomorfism ideal h între două multialgebre $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ de acelaşi tip precum şi algebrele $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ şi $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{B})$. Omomorfismul h induce aplicaţia $h_* : P^*(A) \to P^*(B)$ definită prin $h_*(X) = h(X) = \{h(x) \mid x \in X\}$ pentru orice submulţime nevidă X a mulţimii A.

Teorema 1.4.12. *[67, Teorema 2] Aplicaţia h_* este un omomorfism între algebrele universale $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ şi $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{B})$ dacă şi numai dacă h este omomorfism ideal între $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$.*

Corolarul 1.4.13. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ şi $\mathfrak{B} = (B, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ două multialgebre de acelaşi tip τ, $h : A \to B$ un omomorfism ideal, $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Pentru orice submulţimi nevide $A_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq A$ avem*

$$h(p(A_0, \ldots, A_{n-1})) = p(h(A_0), \ldots, h(A_{n-1})).$$

Corolarul 1.4.14. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ şi $\mathfrak{B} = (B, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ două multialgebre de acelaşi tip τ, $h : A \to B$ un omomorfism ideal, $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Pentru orice elemente $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ avem*

$$h(p(a_0, \ldots, a_{n-1})) = p(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})).$$

Observaţia 1.4.15. Se observă uşor că multialgebrele de acelaşi tip τ, împreună cu omomorfismele de multialgebre şi compunerea uzuală a funcţiilor formează o categorie. Notăm această categorie cu $\mathbf{Malg}(\tau)$. Categoria algebrelor universale de tip τ, notată aici $\mathbf{Alg}(\tau)$, este, evident, o subcategorie în $\mathbf{Malg}(\tau)$. Tot o subcategorie a categoriei $\mathbf{Malg}(\tau)$ se obţine considerând ca obiecte multialgebrele de tip τ, dar ca morfisme, doar omomorfismele ideale de multialgebre. Menţionăm că $\mathbf{Alg}(\tau)$ este o subcategorie plină a acestor categorii de multialgebre.

Dacă luăm ca obiecte hipergrupurile şi ca morfisme omomorfismele de hipergrupuri obţinem o categorie pe care o notăm **HG**. Privim hipergrupurile ca multialgebre cu trei multioperaţii binare ca în primul paragraf al acestui capitol, şi obţinem ca mai sus o subcategorie a categoriei **HG** care are ca morfisme omomorfismele foarte bune de hipergrupuri.

În categoria astfel obţinută considerăm subcategoria care are ca obiecte hipergrupurile canonice (şi ca morfisme omomorfismele foarte bune de hipergrupuri canonice). Obţinem astfel o categorie exactă (vezi [58]).

Observaţia 1.4.16. Remarcăm următorul fapt: corespondenţele $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{P}^*(\mathfrak{A})$ şi $h \mapsto h_*$ definesc un functor covariant între categoria multialgebrelor de tip τ în care morfismele sunt omomorfismele ideale şi categoria $\mathbf{Alg}(\tau)$.

1.5 Multialgebre factor ale algebrelor universale. O teoremă de caracterizare pentru multialgebre

Să amintim în deschiderea acestui paragraf o teoremă de caracterizare pentru multialgebre, rezultat care aparţine lui George Grätzer. Grätzer porneşte de la faptul că cea mai simplă cale de a construi multialgebre este de a imita procedura descrisă în Exemplul 1.1.3, anume, dacă $\mathfrak{B} = (B, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ este o algebră universală şi ρ este o echivalenţă pe B atunci pe mulţimea B/ρ a claselor de echivalenţă $\rho\langle b\rangle$ ale elementelor $b \in B$ se defineşte pentru orice $\gamma < o(\tau)$:

$$f_\gamma(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle) = \{\rho\langle c\rangle \mid c = f_\gamma(c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1}),\ c_i \in \rho\langle b_i\rangle,\ i = 0, \ldots, n_\gamma - 1\}.$$

Se obţine o multialgebră $\mathfrak{B}/\rho = (B/\rho, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$. O astfel de multialgebră se numeşte *multialgebră concretă.* Se observă că multialgebra $\mathfrak{B}/\rho$ este algebră universală dacă şi numai dacă ρ este o congruenţă pe algebra universală $\mathfrak{B}$.

Teorema 1.5.1. *[27, Teoremă] Orice multialgebră este concretă.*

Fie $\mathfrak{A}$ o multialgebră de tip τ şi $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Ca şi în cazul algebrelor universale, vom spune că *identitatea n-ară* (sau *identitatea n-ară tare*) $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută pe multialgebra $\mathfrak{A}$ dacă pentru orice $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$,

$$q(a_0, \ldots, a_{n-1}) = r(a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

Vom spune că *identitatea slabă* (notaţia se vrea cât mai sugestivă posibil) $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este satisfăcută pe multialgebra $\mathfrak{A}$ dacă pentru orice $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$,

$$q(a_0, \ldots, a_{n-1}) \cap r(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq \emptyset.$$

Fie K o clasă de multialgebre de acelaşi tip τ şi $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Vom spune că identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ (sau $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$) este satisfăcută în clasa K dacă este satisfăcută pe orice multialgebră din K.

Numeroase clase de multialgebre pot fi privite ca şi subclase ale unor clase de multialgebre (de acelaşi tip) care au proprietatea că satisfac anumite identităţi (tari sau/şi slabe).

Exemplul 1.5.2. Semihipergrupurile sunt multialgebre cu o multioperaţie binară care satisfac identitatea

$$(\mathbf{x}_0 \circ \mathbf{x}_1) \circ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 \circ (\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2). \tag{1.5.1}$$

H_v-semigrupurile se obţin analog, înlocuind (1.5.1) cu

$$(\mathbf{x}_0 \circ \mathbf{x}_1) \circ \mathbf{x}_2 \cap \mathbf{x}_0 \circ (\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2) \neq \emptyset. \tag{1.5.1'}$$

Observaţia 1.5.3. Fie H o mulţime nevidă şi $\circ$ o multioperaţie binară pe H. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca $(H, \circ)$ să fie hipergrup este existenţa a două multioperaţii binare $/$ şi $\backslash$ pe H astfel încât multialgebra $(H, \circ, /, \backslash)$ să verifice (1.5.1) şi următoarele identităţi slabe:

$$\mathbf{x}_1 \cap \mathbf{x}_0 \circ (\mathbf{x}_0 \backslash \mathbf{x}_1) \neq \emptyset,\ \ \mathbf{x}_1 \cap (\mathbf{x}_1 / \mathbf{x}_0) \circ \mathbf{x}_0 \neq \emptyset, \tag{1.5.2}$$

$$\mathbf{x}_1 \cap \mathbf{x}_0 \backslash (\mathbf{x}_0 \circ \mathbf{x}_1) \neq \emptyset,\ \ \mathbf{x}_1 \cap (\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_0) / \mathbf{x}_0 \neq \emptyset. \tag{1.5.3}$$

Necesitatea se justifică luând multioperaţiile $/$ şi $\backslash$ date de egalităţile (1.1.2). Dacă sunt satisfăcute identităţile (1.5.2) atunci (1.1.1) are loc, ceea ce asigură suficienţa condiţiei de mai sus. De notat că într-o multialgebră $(H, \circ, /, \backslash)$ care verifică identităţile (1.5.1), (1.5.2) şi (1.5.3) nu este necesar ca multioperaţiile $/, \backslash$ să fie legate de $\circ$ prin (1.1.2). Un exemplu trivial în acest sens îl constituie situaţia în care $(H, \circ)$ este un grup cu cel puţin două elemente, deci un hipergrup, iar multioperaţiile $/, \backslash : H \times H \to P^*(H)$ sunt definite prin $a/b = a \backslash b = H$, oricare ar fi $a, b \in H$. Cum pentru orice $a, b \in H$ mulţimile

$$\{x \in H \mid a \in x \circ b\} = \{x \in H \mid a = x \circ b\} \text{ şi } \{x \in H \mid a \in b \circ x\} = \{x \in H \mid a = b \circ x\}$$

au câte un singur element, ele vor fi diferite de H.

Cu alte cuvinte, asociind unui hipergrup $(H, \circ)$ multialgebra $(H, \circ, /, \backslash)$ cu multioperaţiile $/, \backslash$ date de (1.1.2) obţinem o funcţie injectivă (care nu e bijectivă) de la clasa hipergrupurilor la clasa multialgebrelor de tip $\tau = (2, 2, 2)$ ce satisfac identităţile (1.5.1), (1.5.2) şi (1.5.3). Acest fapt ne permite să identificăm hipergrupurile cu acele multialgebre cu trei multioperaţii binare $\circ, /, \backslash$ care au mulţimea suport nevidă, verifică (1.5.1) şi, în plus, au proprietatea că multioperaţiile $/, \backslash$ se obţin din multioperaţia $\circ$ prin egalităţile (1.1.2). O discuţie similară se poate face referitor la H_v-grupuri dacă înlocuim (1.5.1) cu (1.5.1′).

Observaţia 1.5.4. Să considerăm subcategoria categoriei $\mathbf{Malg}((2, 2, 2))$ ce se obţine luând ca şi obiecte acele multialgebre cu trei multioperaţii binare $\circ, /, \backslash$ care au mulţimea suport nevidă, verifică identitatea (1.5.1) şi au proprietatea că $/, \backslash$ se obţin din $\circ$ prin (1.1.2). Observaţiile 1.4.3 şi 1.5.3 ne permit să definim un izomorfism între **HG** şi această subcategorie. Pentru acest izomorfism, funcţia obiect asociază unui hipergrup $(H, \circ)$ multialgebra $(H, \circ, /, \backslash)$ ca în paragraful 1.1, iar funcţia morfism e dată de corespondenţa $h \mapsto h$.

Exemplul 1.5.5. Folosind identificările din observaţiile anterioare, putem privi un hipergrup canonic ca o multialgebră $(H, +, /, \backslash, 0, -)$ de tip $(2, 2, 2, 0, 1)$ cu proprietatea că $(H, +, /, \backslash)$ este hipergrup şi care verifică următoarele identităţi:

$$\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_0 + 0 = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_0/\mathbf{x}_1 = -(\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_0).$$

Exemplul 1.5.6. Un hiperinel Krasner poate fi privit ca o multialgebră $(H, +, /, \backslash, 0, -, \cdot)$ de tip $\tau = (2, 2, 2, 0, 1, 2)$ cu $\cdot$ operaţie binară, care, pe lânga faptul că $(H, +, /, \backslash, 0)$ este un hipergrup canonic, verifică identităţile semigrupului multiplicativ şi identităţile

$$\mathbf{x}_0 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot \mathbf{x}_0 = 0,\ \mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_2,\ (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_0.$$

Observaţia 1.5.7. Fie $\mathfrak{B}$ o algebră universală, ρ o echivalenţă pe B şi $\mathfrak{B}/\rho$ multialgebra cât. Considerăm p ca în Observaţia 1.4.10 şi $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$. Atunci

$$p(\rho\langle b_0\rangle, \dots, \rho\langle b_{n-1}\rangle) \supseteq \{\rho\langle c\rangle \mid c = p(c_0, \dots, c_{n-1}),\ b_i \rho c_i,\ i \in \{0, \dots, n-1\}\}. \tag{1.5.4}$$

Observaţia 1.5.8. Este imediat faptul că dacă $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută pe $\mathfrak{B}$ atunci pentru orice $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ clasa modulo ρ a elementului

$$q(b_0, \dots, b_{n-1}) = r(b_0, \dots, b_{n-1})$$

este în $q(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n-1}\rangle) \cap r(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n-1}\rangle)$ de unde rezultă că identitatea slabă

$$\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$$

este satisfăcută pe $\mathfrak{B}/\rho$.

În cele urmează vom da un exemplu care va arăta că, în general, incluziunea (1.5.4) nu este egalitate. De asemenea, vom vedea că identitatea slabă stabilită anterior pe $\mathfrak{B}/\rho$ nu este, în general, tare. Acest fapt este de aşteptat dacă există $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ pentru care $\mathbf{q} = \mathbf{x}_i$ şi $\mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$, dar, după cum arată exemplul care urmează, aceasta nu este singura situaţie în care o identitate pe $\mathfrak{B}$ devine identitate slabă pe $\mathfrak{B}/\rho$.

Exemplul 1.5.9. Fie $(\mathbb{Z}_5, +)$ grupul aditiv al claselor de resturi modulo 5 şi fie pe $\mathbb{Z}_5$ relaţia de echivalenţă $\rho = (\{0,1\} \times \{0,1\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) \cup (\{3,4\} \times \{3,4\})$. Avem $\rho\langle 0\rangle = \rho\langle 1\rangle = \{0,1\}$, $\rho\langle 2\rangle = \{2\}$ şi $\rho\langle 3\rangle = \rho\langle 4\rangle = \{3,4\}$. Ca mai sus, obţinem un hipergrupoid pe $\mathbb{Z}_5/\rho = \{\{0,1\}, \{2\}, \{3,4\}\}$ cu tabla

$+$	$\{0,1\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}, \{2\}$	$\{2\}, \{3,4\}$	$\{0,1\}, \{3,4\}$
$\{2\}$	$\{2\}, \{3,4\}$	$\{3,4\}$	$\{0,1\}$
$\{3,4\}$	$\{0,1\}, \{3,4\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}, \{2\}, \{3,4\}$

Incluziunea (1.5.4) nu e întotdeauna egalitate deoarece

$$(\rho\langle 2\rangle + \rho\langle 2\rangle) + \rho\langle 3\rangle = \rho\langle 3\rangle + \rho\langle 3\rangle = \{\rho\langle 0\rangle, \rho\langle 2\rangle, \rho\langle 3\rangle\} \text{ şi}$$

$$\{\rho\langle c\rangle \mid c = (b_0 + b_1) + b_2, b_0 = b_1 = 2, b_2 \in \{3,4\}\} = \{\rho\langle c\rangle \mid c \in \{2,3\}\} = \{\rho\langle 2\rangle, \rho\langle 3\rangle\}.$$

De asemenea, avem

$$\rho\langle 2\rangle + (\rho\langle 2\rangle + \rho\langle 3\rangle) = \rho\langle 2\rangle + \rho\langle 0\rangle = \{\rho\langle 2\rangle, \rho\langle 3\rangle\}$$

aşadar asociativitatea are loc doar în manieră slabă pentru $(\mathbb{Z}_5/\rho, +)$.

Totuşi, unele identităţi, cum ar fi cele care caracterizează comutativitatea unei operaţii într-o algebră, au loc în formă tare şi pe multialgebra obţinută în urma factorizării algebrei după o relaţie de echivalenţă.

Exemplul 1.5.10. Fie $\mathfrak{B}$ o algebră universală de tip τ, $\gamma < o(\tau)$ şi σ o permutare a mulţimii $\{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Presupunem că pe multialgebra $\mathfrak{B}$ este satisfăcută identitatea

$$\mathbf{f}_\gamma(\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n_\gamma - 1}) = \mathbf{f}_\gamma(\mathbf{x}_{\sigma(0)}, \ldots, \mathbf{x}_{\sigma(n_\gamma - 1)}).$$

Fie $b_0, \ldots, b_{n_\gamma - 1} \in B$ arbitrare. Dacă $\rho\langle c\rangle \in f_\gamma(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle)$ atunci există $c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1} \in B$ cu $b_0\rho c_0, \ldots, b_{n_\gamma-1}\rho c_{n_\gamma-1}$ astfel încât $c = f_\gamma(c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1})$. Dar atunci avem $b_{\sigma(0)}\rho c_{\sigma(0)}, \ldots, b_{\sigma(n_\gamma-1)}\rho c_{\sigma(n_\gamma-1)}$ şi

$$f_\gamma(c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1}) = f_\gamma(c_{\sigma(0)}, \ldots, c_{\sigma(n_\gamma-1)})$$

aşadar $\rho\langle c\rangle \in f_\gamma(\rho\langle b_{\sigma(0)}\rangle, \ldots, \rho\langle b_{\sigma(n_\gamma-1)}\rangle)$. Dacă $\rho\langle c\rangle \in f_\gamma(\rho\langle b_{\sigma(0)}\rangle, \ldots, \rho\langle b_{\sigma(n_\gamma-1)}\rangle)$ atunci există $c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1} \in B$ cu $b_{\sigma(0)}\rho c_0, \ldots, b_{\sigma(n_\gamma-1)}\rho c_{n_\gamma-1}$ astfel încât $c = f_\gamma(c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1})$. Dar $b_0\rho c_{\sigma^{-1}(0)}, \ldots, b_{n_\gamma-1}\rho c_{\sigma^{-1}(n_\gamma-1)}$ iar cum

$$f_\gamma(c_{\sigma^{-1}(0)}, \ldots, c_{\sigma^{-1}(n_\gamma-1)}) = f_\gamma(c_0, \ldots, c_{n_\gamma-1})$$

avem $\rho\langle c\rangle \in f_\gamma(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle)$. Rezultă că pentru orice $b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1} \in B$ avem

$$f_\gamma(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle) = f_\gamma(\rho\langle b_{\sigma(0)}\rangle, \ldots, \rho\langle b_{\sigma(n_\gamma-1)}\rangle),$$

deci identitatea $\mathbf{f}_\gamma(\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n_\gamma-1}) = \mathbf{f}_\gamma(\mathbf{x}_{\sigma(0)}, \ldots, \mathbf{x}_{\sigma(n_\gamma-1)})$ este satisfăcută pe $\mathfrak{B}/\rho$.

Să vedem ce putem spune despre multialgebrele factor ale semigrupurilor, grupurilor, grupurilor abeliene şi inelelor.

Cazul semigrupurilor

Fie $(S, \cdot)$ un semigrup şi ρ o relaţie de echivalenţă pe S. Conform cu Observaţia 1.5.8 hipergrupoidul $(S/\rho, \cdot)$ verifică asociativitatea în manieră slabă deci este un H_v-semigrup.

Cazul grupurilor

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi ρ o relaţie de echivalenţă pe G. Existenţa şi unicitatea soluţiei pentru fiecare din ecuaţiile $a = xb$ şi $a = by$ ne permite să definim pe G operaţiile $/, \backslash$ prin

$$a/b = \{x \in G \mid a = xb\},\ b\backslash a = \{y \in G \mid a = by\}.$$

Astfel, identificăm grupul G cu o algebră universală $(G, \cdot, /, \backslash)$ (cu $G \neq \emptyset$) care verifică următoarele identităţi

$$(1.5.5) \qquad (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2),$$

$$(1.5.6) \qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{x}_0 \backslash \mathbf{x}_1),\ \mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_1 / \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \backslash (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_1),\ \mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0) / \mathbf{x}_0.$$

Obţinem pe G/ρ o multialgebră $(G/\rho, \cdot, /, \backslash)$ pe care sunt satifăcute identităţile de mai sus în forma lor slabă. Rezultă că $(G/\rho, \cdot)$ este un H_v-semigrup pentru care

$$\rho\langle a \rangle \cdot G/\rho = G/\rho = G/\rho \cdot \rho\langle a \rangle, \text{ pentru orice } a \in G$$

adică un H_v-grup. Dar pentru un H_v-grup nu este necesară existenţa unui element unitate. În cazul nostru clasa $\rho\langle 1 \rangle \in G/\rho$ a elementului unitate $1 \in G$ satisface condiţia

$$\rho\langle a \rangle \in \rho\langle a \rangle \cdot \rho\langle 1 \rangle \cap \rho\langle a \rangle \cdot \rho\langle 1 \rangle, \text{ pentru orice } a \in G,$$

deci $\rho\langle 1 \rangle$ este un element unitate în G/ρ. Mai mult, orice clasă $\rho\langle a \rangle \in G/\rho$ are un invers deoarece, considerând inversul a^{-1} al lui a în G, avem:

$$\rho\langle 1 \rangle \in \rho\langle a^{-1} \rangle \cdot \rho\langle a \rangle \cap \rho\langle a \rangle \cdot \rho\langle a^{-1} \rangle.$$

Dacă grupul G este abelian atunci H_v-grupul G/ρ este comutativ (vezi Exemplul 1.5.10).

Cazul inelelor

O hiperstructură $(R, +, \cdot)$ se numeşte H_v-*inel* dacă $(R, +)$ este un H_v-grup, $(R, \cdot)$ este un H_v-semigrup şi pentru orice $a, b, c \in R$ avem

$$a(b + c) \cap (ab + ac) \neq \emptyset \text{ şi } (b + c)a \cap (ba + ca) \neq \emptyset.$$

E uşor de observat că multialgebra factor a unui inel este un H_v-inel (cu prima multioperaţie comutativă).

Observaţia 1.5.11. Multialgebra factor a unei latici nu este, în general, o multilatice deoarece absorbţia (care apare ca o identitate în definiţia unei multilatici — vezi [1, 2.1, Lema 4] sau [32]) nu este satisfăcută decât în formă slabă în multialgebra factor.

Exemplul 1.5.12. Fie laticea $(\mathbb{N}, \wedge, \vee)$, unde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este mulţimea numerelor naturale, $a \wedge b = (a, b)$ este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b, iar $a \vee b = [a, b]$ este cel mai mic multiplu comun pentru a şi b. Notăm cu $\mathbb{P}$ mulţimea $\{2, 3, 5, \ldots\}$ a numerelor prime şi considerăm relaţia $\rho = \mathbb{P} \times \mathbb{P} \cup \{(a, a) \mid a \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}\}$. Evident, ρ este o echivalenţă pe $\mathbb{N}$ şi avem

$$\rho\langle 2\rangle \in \rho\langle 2\rangle \vee (\rho\langle 2\rangle \wedge \rho\langle 6\rangle) = \rho\langle 2\rangle \vee \{\rho\langle 1\rangle, \rho\langle 2\rangle\} = \{\rho\langle 2\rangle\} \cup \{\rho\langle pq\rangle \mid p, q \in \mathbb{P},\ p \neq q\},$$

deci absorbţia este verificată doar în formă slabă.

Desigur, faptul că o identitate a unei algebre este verificată în formă tare sau slabă pe o multialgebra cât depinde şi de relaţia de echivalenţă după care se face factorizarea. Factorizarea unei algebre universale după o relaţie de congruenţă conduce la o multialgebră (algebră universală) care verifică identităţile din algebra iniţială în forma tare. Acesta nu este, însă, singurul exemplu în acest sens.

Exemplul 1.5.13. Să privim un grup finit G ca o algebră universală $(G, \cdot, 1)$, să considerăm o relaţie de echivalenţă ρ pe G şi identitatea $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$.

Dacă relaţia $\rho = \sim$ este relaţia de conjugare pe G atunci multioperaţia

$$\rho\langle x\rangle \cdot \rho\langle y\rangle = \{\rho\langle z\rangle \mid z = x'y',\ x \sim x',\ y \sim y'\}$$

face din G/ρ un hipergrup canonic (vezi [72]). Prin urmare, multioperaţia nulară din G/ρ corespunzătoare operaţiei nulare 1 din G pune în evidenţă pe $\rho\langle 1\rangle$ şi este operaţie în G/ρ. Este evident faptul că identitatea de mai sus este satisfăcută pe $(G/\rho, \cdot, \rho\langle 1\rangle)$ în formă tare.

Nu la fel se întâmplă (cel puţin nu întotdeauna) când factorizăm grupul G ca în Exemplul 1.1.3. Să considerăm grupul simetric S_3 pe care îl privim ca pe o algebră universală cu două operaţii $(S_3, \circ, (1))$ şi să considerăm echivalenţa la stânga determinată de subgrupul H generat de transpoziţia $(1, 2)$. În hipergrupul cât S_3/H avem

$$H \circ ((1, 3) \circ H) = \{\sigma \circ H \mid \sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2,\ \sigma_1 \in \{(1),\ (1, 2)\},\ \sigma_2 \in \{(1, 3),\ (1, 3) \circ (1, 2)\}\}.$$

Efectuând calculele se obţine $H \circ ((1, 3) \circ H) = \{(1, 3) \circ H,\ (2, 3) \circ H\}$, de unde rezultă că identitatea $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ nu este verificată în forma sa tare pe $(S_3/H, \circ, H)$.

1.6 O clasă de echivalenţe ideale. Relaţia fundamentală a unei multialgebre

În acest paragraf obiectul nostru de lucru îl vor constitui acele relaţii de echivalenţă pe o multialgebră pentru care multialgebra factor obţinută este o algebră universală. Reamintim că dacă $\mathfrak{A}$ este o multialgebră şi ρ este o relaţie de echivalenţă pe A atunci multioperaţiile din multialgebra cât $\mathfrak{A}/\rho = (A/\rho, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ sunt date de egalităţile:

$$f_\gamma(\rho\langle a_0\rangle, \ldots, \rho\langle a_{n_\gamma-1}\rangle) = \{\rho\langle b\rangle \mid b \in f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1}),\ a_i\rho b_i,\ i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\}.$$

Fie A o mulţime şi $P^*(A)$ mulţimea părţilor sale nevide. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe A şi să considerăm relaţia $\overline{\overline{\rho}}$ definită pe $P^*(A)$ astfel:

$$A\overline{\overline{\rho}}B \Leftrightarrow a\rho b,\ \text{oricare ar fi } a \in A,\ b \in B,$$

adică $A\overline{\overline{\rho}}B$ dacă şi numai dacă $A \times B \subseteq \rho$. Remarcăm că $\overline{\overline{\rho}}$ este simetrică, tranzitivă, dar nu este, în general, reflexivă (de exemplu, dacă δ_A este relaţia de egalitate pe A şi $|A| \geq 2$, atunci $\overline{\overline{\delta_A}}$ nu este reflexivă).

Propoziţia 1.6.1. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ o multialgebră şi fie ρ o relaţie de echivalenţă pe A. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $\mathfrak{A}/\rho$ este o algebră universală;

(b) pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice elemente $a, b, x_i \in A$ $(i \in \{0, \ldots, n_\gamma-1\})$ cu proprietatea că $a\rho b$ avem

$$f_\gamma(x_0, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\gamma-1})\overline{\overline{\rho}}f_\gamma(x_0, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\gamma-1})$$

pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$;

(c) pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi pentru orice elemente $x_i, y_i \in A$ cu proprietatea că $x_i\rho y_i$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ avem

$$f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1})\overline{\overline{\rho}}f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma-1});$$

(d) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, orice $p \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi orice $x_i, y_i \in A$ cu proprietatea că $x_i\rho y_i$ pentru toţi $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, avem

$$p(x_0, \ldots, x_{n-1})\overline{\overline{\rho}}p(y_0, \ldots, y_{n-1}).$$

Demonstraţie. (a)⇒(b) Considerăm $a, b \in A$ cu $a\rho b$,

$$x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\gamma-1}) \text{ şi } y \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\gamma-1}).$$

Folosind definiţia multioperaţiilor din multiagebra factor şi faptul că pentru orice $\gamma < o(\tau)$, f_γ este o operaţie în $\mathfrak{A}/\rho$, rezultă că $x\rho y$. Aşadar,

$$f_\gamma(x_0, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\gamma-1}) \;\overline{\overline{\rho}}\; f_\gamma(x_0, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_{n_\gamma-1}),$$

pentru toţi $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$.

(b)⇒(c) Dacă $\gamma < o(\tau)$ şi elementele $x_i, y_i \in A$ sunt astfel ca $x_i \rho y_i$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ atunci, aplicând succesiv (b) avem

$$\begin{gathered}
f_\gamma(x_0, x_1, \ldots, x_{n_\gamma-1})\overline{\overline{\rho}}f_\gamma(y_0, x_1, \ldots, x_{n_\gamma-1}),\\
f_\gamma(y_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n_\gamma-1})\overline{\overline{\rho}}f_\gamma(y_0, y_1, x_2, \ldots, x_{n_\gamma-1}),\\
\vdots\\
f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma-2}, x_{n_\gamma-1})\overline{\overline{\rho}}f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma-2}, y_{n_\gamma-1}).
\end{gathered}$$

Tranzitivitatea lui $\overline{\overline{\rho}}$ încheie demonstraţia acestei implicaţii.

(c)⇒(a) Din definiţia multioperaţiilor din $\mathfrak{A}/\rho$ şi (c) deducem că pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice $x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1} \in A$, submulţimea nevidă $f_\gamma(\rho\langle x_0\rangle, \ldots, \rho\langle x_{n_\gamma-1}\rangle)$ a mulţimii A/ρ conţine o singură clasă, deci f_γ este o operaţie.

(d)⇒(c) Este evident.

(c)⇒(d) Demonstăm această implicaţie prin inducţie după paşii de construcţie a unei funcţii algebrice n-are.

Dacă există $a \in A$ astfel ca $p = c_a^n$ atunci reflexivitatea lui ρ face condiţia de la (d) adevărată. Dacă $p = e_i^n$, cu $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ atunci

$$p(x_0, \ldots, x_{n-1}) = e_i^n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i,\; p(y_0, \ldots, y_{n-1}) = e_i^n(y_0, \ldots, y_{n-1}) = y_i,$$

iar $x_i \rho y_i$ ne conduce la $p(x_0, \ldots, x_{n-1})\overline{\overline{\rho}}p(y_0, \ldots, y_{n-1})$.

Presupunem că afirmaţia are loc pentru funcţiile algebrice $p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1} \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi considerăm $p = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})$ (cu $\gamma < o(\tau)$). Pentru orice

$$\begin{aligned}
&x \in p(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f_\gamma(p_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})) \text{ şi}\\
&y \in p(y_0, \ldots, y_{n-1}) = f_\gamma(p_0(y_0, \ldots, y_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(y_0, \ldots, y_{n-1}))
\end{aligned}$$

există $a_i \in p_i(x_0, \ldots, x_{n-1})$ şi $b_i \in p_i(y_0, \ldots, y_{n-1})$, $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, astfel încât

$$x \in f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1}),\ y \in f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma - 1}).$$

Conform ipotezei inducţiei, avem $a_i \rho b_i$ pentru toţi $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, ceea ce, folosind (c), ne conduce la $f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1}) \overline{\overline{\rho}} f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma - 1})$, de unde avem $x \rho y$. □

Se observă imediat că orice echivalenţă ρ pe A pentru care multialgebra $\mathfrak{A}/\rho$ este algebră universală este o echivalenţă ideală.

Corolarul 1.6.2. *Dacă ρ este o echivalenţă pe A astfel încât $\mathfrak{A}/\rho$ este o algebră universală atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ avem $x, y \in p(a_0, \ldots, a_{n-1})$ implică $x \rho y$.*

Observaţia 1.6.3. Dacă relaţia de echivalenţă ρ satisface una din condiţiile echivalente din Propoziţia 1.6.1 atunci operaţiile din algebra obţinută prin factorizare sunt definite astfel: pentru $\gamma < o(\tau)$, $a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1} \in A$ şi $b \in f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1})$

$$f_\gamma(\rho\langle a_0 \rangle, \ldots, \rho\langle a_{n_\gamma - 1} \rangle) = \rho\langle b \rangle.$$

Exemplul 1.6.4. Fie $(H, \circ)$ un hipergrupoid. O relaţie de echivalenţă ρ pe H are proprietatea că $(H/\rho, \circ)$ este un grupoid dacă şi numai dacă pentru orice $a, b, x \in H$ pentru care $a \rho b$ avem $a \circ x \overline{\overline{\rho}} b \circ x$ şi $x \circ a \overline{\overline{\rho}} x \circ b$. O astfel de echivalenţă se numeşte *echivalenţă tare regulată* (vezi [10, Definiţia 8]).

Observaţia 1.6.5. Fie $(H, \circ)$ un hipergrupoid şi fie ρ o echivalenţă tare regulată pe H. Dacă $(H, \circ)$ este un semihipergrup atunci $(H/\rho, \circ)$ este un semigrup, iar dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup atunci $(H/\rho, \circ)$ este un grup ([10, Teorema 31]). Mai mult, dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup şi îl privim ca pe o multialgebră $(H, \circ, /, \backslash)$ ca în paragraful 1.1, atunci multioperaţiile binare $/$ şi $\backslash$ devin pe H/ρ chiar operaţiile binare care asociază la o pereche oarecare $(\rho\langle a \rangle, \rho\langle b \rangle) \in H/\rho \times H/\rho$ soluţia (unică) din H/ρ a ecuaţiei $\rho\langle a \rangle = x \circ \rho\langle b \rangle$, respectiv a ecuaţiei $\rho\langle a \rangle = \rho\langle b \rangle \circ x$.

Într-adevăr, dacă $a, b \in H$ atunci $\rho\langle a \rangle / \rho\langle b \rangle = \{\rho\langle c \rangle \mid c \in a'/b',\ a \rho a',\ b \rho b'\}$, de unde rezultă că pentru $x \in \rho\langle a \rangle / \rho\langle b \rangle$ există $a', b', c \in H$ astfel încât $\rho\langle a \rangle = \rho\langle a' \rangle$, $\rho\langle b \rangle = \rho\langle b' \rangle$, $x = \rho\langle c \rangle$ şi $a' \in c \circ b'$. Atunci $\rho\langle a \rangle = \rho\langle a' \rangle = \rho\langle c \rangle \circ \rho\langle b' \rangle = x \circ \rho\langle b \rangle$. Cum $(H/\rho, \circ)$ este grup, deducem că pentru orice $a, b \in H$ mulţimea $\rho\langle a \rangle / \rho\langle b \rangle$ are un singur element x care verifică egalitatea $\rho\langle a \rangle = x \circ \rho\langle b \rangle$. Analog se procedează pentru $\backslash$.

Notaţie. Notăm cu $E_{ua}(\mathfrak{A})$ mulţimea echivalenţelor ρ ale multialgebrei $\mathfrak{A}$ pentru care multialgebra cât $\mathfrak{A}/\rho$ este o algebră universală.

Observaţia 1.6.6. Mulţimea $E_{ua}(\mathfrak{A})$ este nevidă, deoarece $A \times A \in E_{ua}(\mathfrak{A})$.

Propoziţia 1.6.7. *Mulţimea $E_{ua}(\mathfrak{A})$ formează un sistem de închidere algebric pe $A \times A$.*

Demonstraţie. Arătăm că mulţimea $E_{ua}(\mathfrak{A})$ este închisă la intersecţii arbitrare şi la reuniuni de submulţimi nevide (ordonate cu incluziunea) dirijate superior.

Să considerăm o mulţime $\{\rho_i \mid i \in I\}$ de relaţii din $E_{ua}(\mathfrak{A})$, $\gamma < o(\tau)$ şi $x_j, y_j \in A$ $(j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\})$.

Dacă $(x_j, y_j) \in \bigcap_{i \in I} \rho_i$ pentru toţi $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ atunci $x_j \rho_i y_j$ pentru orice $i \in I$ şi orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, deci pentru orice $i \in I$ avem

$$f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) \overline{\overline{\rho_i}} f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1}).$$

Aşadar, $x \rho_i y$ oricare ar fi $i \in I$, $x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1})$ şi $y \in f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1})$. Înseamnă că $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} \rho_i$ pentru orice $x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1})$ şi $y \in f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1})$ ceea ce este echivalent cu faptul că

$$(f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1}), f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1})) \in \overline{\overline{\bigcap_{i \in I} \rho_i}}.$$

Astfel am demonstrat că $\bigcap_{i \in I} \rho_i \in E_{ua}(\mathfrak{A})$.

Dacă $(x_j, y_j) \in \bigcup_{i \in I} \rho_i$ pentru toţi $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ atunci pentru fiecare $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ există $i_j \in I$ astfel încât $(x_j, y_j) \in \rho_{i_j}$. Considerând că mulţimea ordonată $(\{\rho_i \mid i \in I\}, \subseteq)$ este dirijată şi $I \neq \emptyset$ obţinem un element $m \in I$ cu proprietatea că $\rho_{i_j} \subseteq \rho_m$ pentru toţi $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. În consecinţă, avem

$$f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) \overline{\overline{\rho_m}} f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1}).$$

Astfel, $(x, y) \in \rho_m \subseteq \bigcup_{i \in I} \rho_i$ pentru orice $x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1})$ şi $y \in f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1})$ ceea ce înseamnă că

$$(f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1}), f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1})) \in \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} \rho_i}}.$$

Deci $\bigcup_{i \in I} \rho_i \in E_{ua}(\mathfrak{A})$. $\square$

Corolarul 1.6.8. *Mulţimea ordonată* $(E_{ua}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ *este o latice algebrică.*

Corolarul 1.6.9. *Dacă* $R \subseteq A \times A$ *atunci cea mai mică echivalenţă pe* A *ce include pe* R *şi care are proprietatea că multialgebra factor este o algebră universală este relaţia*

$$\alpha(R) = \bigcap \{\rho \in E_{ua}(\mathfrak{A}) \mid R \subseteq \rho\}.$$

Se observă că dacă multialgebra $\mathfrak{A}$ nu este o algebră universală atunci $\mathfrak{A}/\delta_A$ nu este o algebră universală, deci cel mai mic element din $E_{ua}(\mathfrak{A})$ nu este δ_A.

Definiţia 1.6.1. Fie $\mathfrak{A}$ o multialgebră. Cea mai mică echivalenţă din $E_{ua}(\mathfrak{A})$ se numeşte *relaţia fundamentală a multialgebrei* $\mathfrak{A}$.

Fie $\alpha_{\mathfrak{A}}$ relaţia definită pe mulţimea suport A a multialgebrei $\mathfrak{A}$ de tip τ astfel: pentru $x, y \in A$, $x\alpha_{\mathfrak{A}}y$ dacă şi numai dacă există $n \in \mathbb{N}$, funcţia algebrică $p \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi elementele $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ astfel încât $x, y \in p(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Observaţia 1.6.10. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, funcţia algebrică $p \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi elementele $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ există $m \in \mathbb{N}$, un polinom $p' \in P^{(m)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi elementele $b_0, \ldots, b_{m-1} \in A$ astfel încât $p(a_0, \ldots, a_{n-1}) = p'(b_0, \ldots, b_{m-1})$.

Dacă există $a \in A$ astfel ca $p = c_a^n$ atunci putem considera $m = n+1$, $p' = e_n^{n+1}$, $b_0 = a_0$, $\ldots$, $b_{n-1} = a_{n-1}$ şi $b_n = a$. Dacă $p = e_i^n$ atunci putem lua $m = n$, $p' = p$ şi $b_i = a_i$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru funcţiile algebrice $p_0, \ldots, p_{n\gamma-1} \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi fie $p = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})$. Dacă $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ atunci pentru orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ există $m_j \in \mathbb{N}$, $p''_j \in P^{(m_j)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $b_0^j, \ldots, b_{m_j-1}^j \in A$ astfel încât $p_j(a_0, \ldots, a_{n-1}) = p''_j(b_0^j, \ldots, b_{m_j-1}^j)$. Fie $m = m_0 + \cdots + m_{n_\gamma-1}$. Folosind Observaţiile 1.2.7 şi 1.2.8 rezultă că pentru fiecare $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ şi fiecare polinom p''_j există un polinom $p'_j \in P^{(m)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ cu proprietatea că pentru orice submulţimi nevide $A_0, \ldots, A_{m-1} \subseteq A$ avem:

$$p'_0(A_0, \ldots, A_{m-1}) = p''_j(A_0, \ldots, A_{m_0-1}),$$

$$p'_1(A_0, \ldots, A_{m-1}) = p''_j(A_{m_0}, \ldots, A_{m_0+m_1-1}),$$

$$\vdots$$

$$p'_{n_\gamma-1}(A_0, \ldots, A_{m-1}) = p''_{n_\gamma-1}(A_{m_0+\cdots+m_{n_\gamma-2}}, \ldots, A_{m_0+\cdots+m_{n_\gamma-2}+m_{n_\gamma-1}-1}).$$

Considerăm $p' = f_\gamma(p'_0, \ldots, p'_{n_\gamma-1})$ şi elementele $b_0, \ldots, b_{m-1}$ ca fiind, respectiv, elementele $b^0_0,\ldots,b^0_{m_0-1},\ldots,b^{n_\gamma-1}_0,\ldots,b^{n_\gamma-1}_{m_{n_\gamma-1}-1}$ şi avem:

$$\begin{aligned}
p(a_0, \ldots, a_{n-1}) &= f_\gamma(p_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(a_0, \ldots, a_{n-1})) \\
&= f_\gamma(p''_0(b^0_0, \ldots, b^0_{m_0-1}), \ldots, p''_{n_\gamma-1}(b^{n_\gamma-1}_0, \ldots, b^{n_\gamma-1}_{m_{n_\gamma-1}-1})) \\
&= f_\gamma(p'_0(b_0, \ldots, b_{m-1}), \ldots, p'_{n_\gamma-1}(b_0, \ldots, b_{m-1})) \\
&= f_\gamma(p'_0, \ldots, p'_{n_\gamma-1})(b_0, \ldots, b_{m-1}) \\
&= p'(b_0, \ldots, b_{m-1}).
\end{aligned}$$

Observaţia 1.6.11. Din observaţia anterioară deducem că pentru $x, y \in A$, $x\alpha_{\mathfrak{A}}y$ dacă şi numai dacă există $n \in \mathbb{N}$, polinomul $p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi elementele $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ astfel încât $x, y \in p(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Relaţia $\alpha_{\mathfrak{A}}$ este simetrică, reflexivă (orice $a \in A$ este un element al lui $c^1_a(a) = e^1_0(a)$), dar nu este, în general, tranzitivă.

Exemplul 1.6.12. Pentru a ilustra afirmaţia de mai sus vom folosi [10, Observaţia 82]. Să considerăm semihipergrupul $(H, \circ)$ dat de tabla de mai jos:

$\circ$	a	b	c	d
a	b, c	b, d	b, d	b, d
b	b, d	b, d	b, d	b, d
c	b, d	b, d	b, d	b, d
d	b, d	b, d	b, d	b, d

Este evident că perechile (c, b) şi (b, d) sunt în relaţia definită ca mai sus pentru semihipergrupul $(H, \circ)$, dar singurul hiperprodus cu cel puţin doi factori care conţine pe c este $a \circ a$ şi acesta nu-l conţine pe d.

Închiderea tranzitivă $\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ a relaţiei $\alpha_{\mathfrak{A}}$ este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A care include pe $\alpha_{\mathfrak{A}}$ (vezi [3, 2.8]).

Teorema 1.6.13. *Relaţia $\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ este relaţia fundamentală a multialgebrei $\mathfrak{A}$.*

Demonstraţie. **A.** Dacă $f \in P^{(1)}_A(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $a, b \in A$ verifică $a\alpha^*_{\mathfrak{A}}b$ atunci $f(a)\overline{\overline{\alpha^*_{\mathfrak{A}}}}f(b)$.

Conform definiţiei relaţiei $\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ rezultă că există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $z_0, \ldots, z_m \in A$ astfel încât $a = z_0 \alpha_{\mathfrak{A}} z_1 \alpha_{\mathfrak{A}} \ldots \alpha_{\mathfrak{A}} z_m = b$. Considerăm $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. Cum $z_j \alpha_{\mathfrak{A}} z_{j+1}$, există $n_j \in \mathbb{N}$, $p_j \in P_A^{(n_j)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $a_0, \ldots, a_{n_j-1} \in A$ astfel încât

$$z_j, z_{j+1} \in p_j(a_0, \ldots, a_{n_j-1}).$$

Conform Observaţiei 1.2.5 compunerea $p'_j = f \circ p_j$ aparţine mulţimii $P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$. Din

$$f(z_j), f(z_{j+1}) \subseteq f(p_j(a_0, \ldots, a_{n_j-1})) = p'_j(a_0, \ldots, a_{n_j-1})$$

deducem că orice două elemente, unul din $f(z_j)$ şi unul din $f(z_{j+1})$, sunt în relaţia $\alpha_{\mathfrak{A}}$, aşadar $f(z_j)\overline{\overline{\alpha^*_{\mathfrak{A}}}}f(z_{j+1})$. Deoarece aceasta se întâmplă pentru orice $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ şi relaţia $\overline{\overline{\alpha^*_{\mathfrak{A}}}}$ este tranzitivă, rezultă că $f(a) = f(z_0)\overline{\overline{\alpha^*_{\mathfrak{A}}}}f(z_m) = f(b)$.

B. Multialgebra factor $\mathfrak{A}/\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ este o algebră universală.

Fie $\gamma < o(\tau)$ şi elementele arbitrare $a, b, x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1} \in A$ astfel ca $a\alpha^*_{\mathbf{qr}}b$. Aplicând **A** pentru funcţiile algebrice unare (din $P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$)

$$f_\gamma(e_0^1, c_{x_1}^1, \ldots, c_{x_{n_\gamma-1}}^1), f_\gamma(c_{x_0}^1, e_0^1, c_{x_2}^1, \ldots, c_{x_{n_\gamma-1}}^1), \ldots, f_\gamma(c_{x_0}^1, \ldots, c_{x_{n_\gamma-2}}^1, e_0^1)$$

rezultă că $\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ verifică (b) din Propoziţia 1.6.1, aşadar $\mathfrak{A}/\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ este o algebră universală.

C. Dacă $\rho \in E_{ua}(\mathfrak{A})$ atunci $\alpha^*_{\mathfrak{A}} \subseteq \rho$.

Dacă $x\alpha_{\mathfrak{A}}y$ atunci există $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_A^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ astfel ca $x, y \in p(a_0, \ldots, a_{n-1})$ şi Corolarul 1.6.2 ne conduce la $x\rho y$. De aici obţinem incluziunea $\alpha_{\mathfrak{A}} \subseteq \rho$. Considerând închiderile tranzitive ale celor două relaţii obţinem incluziunea vizată. □

Definiţia 1.6.2. Fie $\mathfrak{A}$ o multialgebră şi $\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ relaţia sa fundamentală. Algebra universală $\mathfrak{A}/\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ se numeşte *algebra fundamentală a multialgebrei* $\mathfrak{A}$.

Observaţia 1.6.14. Proiecţia canonică φ_A a unei multialgebre $\mathfrak{A}$ în algebra sa fundamentală $\mathfrak{A}/\alpha^*_{\mathfrak{A}}$ este un omomorfism ideal.

Exemplul 1.6.15. Fie $(H, \circ)$ un hipergrupoid. În [10, Definiţia 11] este prezentată relaţia β^* după cum urmează. Se notează cu $G(H)$ grupoidul părţilor lui H (adică ceea ce noi notăm cu $\mathfrak{P}^*(H, \circ)$), cu $\mathcal{L}(A)$ grupoidul generat liber de A şi cu g funcţia definită de la $\mathcal{L}(H)$ la $G(H)$ prin $g(h) = \{h\}$ dacă $h \in H$ şi $g(\gamma) = g(\gamma_1) \circ g(\gamma_2)$ dacă $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{L}(H)$ cu $\gamma = \gamma_1\gamma_2$. Relaţia β^* este închiderea tranzitivă a relaţiei $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \beta_n$ cu $\beta_1 = \delta_H$ şi

$$x\beta_n y \Leftrightarrow \exists a_1, \ldots, a_n \in H,\ \exists \gamma \in \mathcal{L}(\{a_1, \ldots, a_n\}) :\ x, y \in g(\gamma).$$

Se constată cu uşurinţă că imaginile $g(\gamma)$ ale funcţiei g sunt imagini de polinoame din $G(H)$ aplicate la mulţimi cu un element, aşadar aceasta este chiar *relaţia fundamentală a hipergrupoidului* $(H, \circ)$. Dacă multioperaţia $\circ$ este asociativă, *relaţia fundamentală a semihipergrupului* $(H, \circ)$ este închiderea tranzitivă β^* a relaţiei $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \beta_n$ unde

$$x \beta_n y \Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in H : \ x, y \in a_1 \circ \cdots \circ a_n.$$

Exemplul 1.6.16. Dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup şi ρ este o echivalenţă tare regulată pe H atunci H/ρ este un grup (vezi [10, Teorema 31]). Cea mai mică echivalenţă pe H pentru care hipergrupoidul factor este un semigrup este închiderea tranzitivă β^* a relaţiei

$$\beta = \bigcup \{a_1 \circ \cdots \circ a_n \times a_1 \circ \cdots \circ a_n \mid a_1, \dots, a_n \in H, \ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Cum această relaţie este tare regulată, semigrupul obţinut prin factorizare este un grup (vezi [10, Teorema 31]). Înseamnă că cea mai mică relaţie pe hipergrupul $(H, \circ, /, \backslash)$ pentru care obţinem în urma factorizării un grup este inclusă în β^*. Dar

$$\begin{aligned} \beta &= \bigcup \{p(a_1, \dots, a_n) \times p(a_1, \dots, a_n) \mid p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(H, \circ)), \ a_1, \dots, a_n \in H, \ n \in \mathbb{N}^*\} \\ &\subseteq \bigcup \{p(a_1, \dots, a_n) \times p(a_1, \dots, a_n) \mid p \in P^{(n)}(\mathfrak{P}^*(H, \circ, /, \backslash)), \ a_1, \dots, a_n \in H, \ n \in \mathbb{N}^*\}, \end{aligned}$$

rezultă că β^* este cea mai mică echivalenţă pe multialgebra $(H, \circ, /, \backslash)$ pentru care multialgebra factor este o algebră universală. Faptul că multioperaţiile $/$ şi $\backslash$ devin operaţii binare care asociază la o pereche oarecare $(\beta^*\langle a \rangle, \beta^*\langle b \rangle) \in H/\beta^* \times H/\beta^*$ soluţia (unică) din H/β^* a ecuaţiei $\beta^*\langle a \rangle = x \circ \beta^*\langle b \rangle$, respectiv a ecuaţiei $\beta^*\langle a \rangle = \beta^*\langle b \rangle \circ x$ (vezi Exemplul 1.6.5) face ca algebra obţinută să fie un grup. Oricum, ceea ce este interesant şi extrem de util în cazul hipergrupurilor este că *relaţia fundamentală* poate fi obţinută considerând în caracterizarea dată de Teorema 1.6.13 doar acele funcţii algebrice (sau polinoamele) p care se obţin cu ajutorul multioperaţiei $\circ$ (cu alte cuvinte, în definiţia lui β nu e necesar să folosim funcţiile algebrice (sau polinoamele) în construcţia cărora intervin multioperaţiile $/$ şi $\backslash$). Mai mult, pentru hipergrupuri relaţia β este tranzitivă, deci $\beta^* = \beta$.

Exemplul 1.6.17. Fie $(R, +, \cdot)$ un hiperinel în sens general şi fie $(P^*(R), +, \cdot)$ algebra părţilor sale nevide. Aceasta este o algebră universală cu două operaţii binare definite astfel:

$$A + B = \bigcup \{a + b \mid a \in A, \ b \in B\}, \ A \cdot B = \bigcup \{a \cdot b \mid a \in A, \ b \in B\}.$$

Evident, cele două operaţii definite mai sus sunt asociative; mai mult,

$$\begin{aligned} A\cdot(B+C) &= \bigcup\{a\cdot(b+c) \mid a\in A, b\in B, c\in C\} \\ &\subseteq \bigcup\{a\cdot b + a\cdot c \mid a\in A, b\in B, c\in C\} \\ &\subseteq A\cdot B + A\cdot C \end{aligned}$$

şi analog $(B+C)\cdot A \subseteq B\cdot A + C\cdot A$.

Conform consideraţiilor de mai sus, imaginile polinoamelor algebrei $(P^*(R),+,\cdot)$ sunt sume de produse de submulţimi nevide ale lui R sau sunt incluse în polinoame de această formă. Aşadar, *relaţia fundamentală a hiperinelului* R este închiderea tranzitivă γ^* a relaţiei γ din [83, Definiţia 1]:

$$x\gamma y \Leftrightarrow \exists l, k_j \in \mathbb{N}^*,\ \exists a_{ij}\in R,\ j\in\{0,\dots,l-1\},\ i\in\{0,\dots,k_j-1\}:\ x,y\in \sum_{j=0}^{l-1}\left(\prod_{i=0}^{k_j-1} a_{ij}\right).$$

Teorema 1.6.18. *Fie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ multialgebre de tip τ şi $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\alpha^*_{\mathfrak{A}}$, respectiv $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}/\alpha^*_{\mathfrak{B}}$ algebrele lor fundamentale. Dacă $h: A\to B$ este un omomorfism de multialgebre, atunci există un unic omomorfism de algebre universale $\overline{h}:\overline{A}\to\overline{B}$ astfel încât următoarea diagramă este comutativă:*

(1.6.1)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ {\scriptstyle\varphi_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_B} \\ \overline{A} & \xrightarrow{\overline{h}} & \overline{B} \end{array}.$$

Demonstraţie. Presupunem că există un omomorfism $\overline{h}$ cu proprietatea din enunţ. Din comutativitatea diagramei (1.6.1) rezultă

(1.6.2)
$$\overline{h}(\alpha^*_{\mathfrak{A}}\langle a\rangle) = \alpha^*_{\mathfrak{B}}\langle h(a)\rangle$$

pentru orice $\alpha^*_{\mathfrak{A}}\langle a\rangle \in \overline{A}$. Deducem unicitatea lui $\overline{h}$.

Arătăm că omomorfismul $\overline{h}$ există. Egalitatea (1.6.2) defineşte o funcţie $\overline{h}:\overline{A}\to\overline{B}$. Într-adevăr, fie $x,y\in A$ astfel încât $x\alpha^*_{\mathfrak{A}}y$. Aceasta înseamnă că există $m\in\mathbb{N}^*$ şi

$$x = x_0, x_1, \dots, x_m = y \in A$$

astfel încât $x_i\alpha_{\mathfrak{A}}x_{i+1}$ pentru orice $i\in\{0,\dots,m-1\}$. Astfel, pentru orice $i\in\{0,\dots,m-1\}$, există $k_i\in\mathbb{N}$, $p_i\in P^{(k_i)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $a_0^i,\dots,a_{k_i-1}^i\in A$ pentru care

$$x_i, x_{i+1} \in p_i(a_0^i,\dots,a_{k_i-1}^i).$$

Rezultă, folosind Propoziţia 1.4.9, că

$$h(x_i), h(x_{i+1}) \in p_i(h(a_0^i), \ldots, h(a_{k_i-1}^i)).$$

Aşadar, $h(x_i)\alpha_{\mathfrak{B}} h(x_{i+1})$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, de unde deducem că

$$h(x) = h(x_0)\alpha_{\mathfrak{B}}^* h(x_m) = h(y).$$

Vom verifica acum că $\overline{h}$ este un omomorfism: dacă $\gamma < o(\tau)$, $a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1} \in A$ şi $a \in f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1})$ atunci

$$\overline{h}(f_\gamma(\alpha_{\mathfrak{A}}^*\langle a_0\rangle, \ldots, \alpha_{\mathfrak{A}}^*\langle a_{n_\gamma-1}\rangle)) = \overline{h}(\alpha_{\mathfrak{A}}^*\langle a\rangle) = \alpha_{\mathfrak{B}}^*\langle h(a)\rangle.$$

Cum h este omomorfism, avem $h(a) \in f_\gamma(h(a_0), \ldots, h(a_{n_\gamma-1}))$ şi astfel

$$\alpha_{\mathfrak{B}}^*\langle h(a)\rangle = f_\gamma(\alpha_{\mathfrak{B}}^*\langle h(a_0)\rangle, \ldots, \alpha_{\mathfrak{B}}^*\langle h(a_{n_\gamma-1})\rangle) = f_\gamma(\overline{h}(\alpha_{\mathfrak{A}}^*\langle a_0\rangle), \ldots, \overline{h}(\alpha_{\mathfrak{A}}^*\langle a_{n_\gamma-1}\rangle))$$

ceea ce încheie demonstraţia teoremei. □

Corolarul 1.6.19. *Dacă* $\mathfrak{A}$ *este o multialgebră atunci* $\overline{1_A} = 1_{\overline{A}}$.

Corolarul 1.6.20. *Dacă* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *sunt multialgebre de acelaşi tip* τ *şi* $h : A \to B$, $g : B \to C$ *sunt omomorfisme, atunci* $\overline{g \circ h} = \overline{g} \circ \overline{h}$.

Observaţia 1.6.21. Din corolarele de mai sus rezultă că factorizarea după relaţia fundamentală determină un functor covariant $F : \mathbf{Malg}(\tau) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\tau)$. Acest functor este definit astfel: pentru orice multialgebră $\mathfrak{A}$ de tip τ, $F(\mathfrak{A}) = \overline{\mathfrak{A}}$ şi pentru orice omomorfism h între multialgebrele $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ (de tip τ), $F(h) = \overline{h}$ unde $\overline{h}$ este omomorfismul din diagrama (1.6.1).

Notaţii. Vom folosi în continuare notaţiile din Teorema 1.6.18. Astfel, pentru o multialgebră $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ vom nota cu $\overline{\mathfrak{A}}$ algebra fundamentală şi cu φ_A proiecţia canonică a multialgebrei $\mathfrak{A}$ pe $\overline{\mathfrak{A}}$. Vom renunţa la indice în notaţia $\alpha_{\mathfrak{A}}^*$ atunci când aceasta nu creează confuzie. Menţionăm că * semifică faptul că este vorba despre închiderea tranzitivă a relaţiei $\alpha = \alpha_{\mathfrak{A}}$ definită anterior. De asemenea, notăm cu $\overline{a}$ clasa $\alpha^*\langle a\rangle = \varphi_A(a)$ a unui element $a \in A$ în raport cu relaţia $\alpha_{\mathfrak{A}}^*$.

1.7 Identităţi pe multialgebre. Multialgebre complete

Să analizăm ce se întâmplă cu identităţile unei multialgebre în urma factorizării după relaţia fundamentală.

Propoziţia 1.7.1. *Fie $\mathfrak{A}$ o multialgebră, $n \in \mathbb{N}$, şi $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Dacă pe multialgebra $\mathfrak{A}$ avem $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ atunci pe algebra $\overline{\mathfrak{A}}$ are loc identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$.*

Demonstraţie. Din Observaţia 1.6.14 şi Corolarul 1.4.14 avem

$$\varphi_A(p(a_0, \ldots, a_{n-1})) = p(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}), \tag{1.7.1}$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$.

Fie $\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}} \in \overline{A}$. Cum identitatea slabă $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este verificată pe $\mathfrak{A}$, avem

$$q(a_0, \ldots, a_{n-1}) \cap r(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq \emptyset,$$

pentru orice $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. Rezultă că există $a \in q(a_0, \ldots, a_{n-1}) \cap r(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Din (1.7.1) deducem

$$q(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}) = \overline{a} = r(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}),$$

şi demonstraţia este încheiată. □

Cum orice identitate tare este verificată şi în manieră slabă, avem:

Corolarul 1.7.2. *Fie $\mathfrak{A}$ o multialgebră, $n \in \mathbb{N}$, şi $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Dacă identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută pe multialgebra $\mathfrak{A}$ atunci $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută şi pe algebra $\overline{\mathfrak{A}}$.*

Observaţia 1.7.3. Se observă că în demonstraţia Propoziţiei 1.7.1 s-a folosit doar faptul că $\alpha^* \in E_{ua}(\mathfrak{A})$ ceea ce ar permite formularea unui rezultat asemănător pentru orice relaţie din $E_{ua}(\mathfrak{A})$. Cu alte cuvinte, pentru o multialgebră $\mathfrak{A}$ de tip τ, o relaţie $\rho \in E_{ua}(\mathfrak{A})$ şi două simboluri polinomiale n-are $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ avem: *dacă cel puţin una din identităţile $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ sau $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este satisfăcută pe multialgebra $\mathfrak{A}$ atunci identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută pe algebra $\mathfrak{A}/\rho$.*

Corolarul 1.7.4. *Fie K o clasă de multialgebre şi fie $\overline{K}$ clasa algebrelor fundamentale ale algebrelor din K. Dacă identitatea $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ (sau $\mathbf{q} = \mathbf{r}$) este satisfăcută în K, atunci identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută în $\overline{K}$.*

Observaţia 1.7.5. Cum orice hipergrup poate fi privit ca o multialgebră de tip $(2,2,2)$ care verifică identităţile (1.5.1), (1.5.2) şi (1.5.3), deducem (şi de aici) că algebra obţinută prin factorizarea unui hipergrup după o echivalenţă tare regulată verifică identităţile (1.5.5) şi (1.5.6), deci este un grup. În particular, algebra fundamentală a unui hipergrup este un grup. De asemenea, se deduce că algebra fundamentală a unui hiperinel cu prima operaţie comutativă sau slab comutativă este un inel ş.a.m.d. În consecinţă putem defini, ca în Observaţia 1.6.21, un functor covariant F de la categoria **HG** a hipergrupurilor la categoria **Grp** a grupurilor.

În general, reciproca afirmaţiei din Propoziţia 1.7.1 nu este valabilă. Un exemplu în acest sens îl constituie cazul în care multialgebra $\mathfrak{A}$ are mai mult de un element iar relaţia sa fundamentală este relaţia totală $A\times A$, dar aceasta nu este singura situaţie. Totuşi, între multialgebrele care au aceeaşi algebră fundamentală, presupunând că aceasta are cel puţin două elemente, se găsesc multialgebre care verifică identităţile din algebra fundamentală, unele din ele în forma slabă, unele în forma tare.

Propoziţia 1.7.6. *Fie* $\mathfrak{A}=(A,(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ *o multialgebră şi fie* $\overline{\mathfrak{A}}=(\overline{A},(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ *algebra sa fundamentală. Dacă* $|\overline{A}|\neq 1$, $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{q},\mathbf{r}\in\mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ *şi* $\mathbf{q}=\mathbf{r}$ *este satisfăcută pe* $\overline{\mathfrak{A}}$ *atunci pe* A *există o structură de multialgebră* $\mathfrak{A}'$ *(de tip* τ*) cu multioperaţiile* f'_γ, $\gamma<o(\tau)$, *astfel încât* $\overline{\mathfrak{A}'}=\overline{\mathfrak{A}}$ *şi* $\mathbf{q}\cap\mathbf{r}\neq\emptyset$ *este verificată pe* $\mathfrak{A}'$.

Demonstraţie. Dacă $\overline{A}=\emptyset$ atunci $A=\emptyset$ şi proprietatea are loc în mod trivial. Să presupunem, deci, că $|\overline{A}|>1$. Definim pentru orice $\gamma<o(\tau)$ şi orice $a_0,\ldots,a_{n_\gamma-1}\in A$,

$$f'_\gamma(a_0,\ldots,a_{n_\gamma-1})=\{a\in A\mid \overline{a}=f_\gamma(\overline{a_0},\ldots,\overline{a_{n_\gamma-1}})\},\tag{1.7.2}$$

şi arătăm că multialgebra $\mathfrak{A}'=(A,(f'_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ satisface condiţiile din enunţ.

A. Vom demonstra prin inducţie după paşii de construcţie a unui simbol polinomial n-ar că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{p}\in\mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi $a_0,\ldots,a_{n-1}\in A$ avem:

$$p(a_0,\ldots,a_{n-1})\subseteq p'(a_0,\ldots,a_{n-1}),\tag{1.7.3}$$

unde $p'=(\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}')}$.

Dacă există $i\in\{0,\ldots,n-1\}$ astfel ca $\mathbf{p}=\mathbf{x}_i$ atunci incluziunea de mai sus este adevărată, cei doi membrii fiind egali cu mulţimea $\{a_i\}$.

Presupunem incluziunea demonstrată pentru simbolurile $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1}$ şi considerăm $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1})$. Avem

$$\begin{aligned} p(a_0, \ldots, a_{n-1}) &= f_\gamma(p_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(a_0, \ldots, a_{n-1})) \\ &\subseteq f_\gamma(p'_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p'_{n_\gamma-1}(a_0, \ldots, a_{n-1})). \end{aligned}$$

Observăm din definiţia operaţiilor din algebra fundamentală a multialgebrei $\mathfrak{A}$ că pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice $a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1} \in A$

$$f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1}) \subseteq f'_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1}). \tag{1.7.4}$$

rezultă că mulţimea $f_\gamma(p'_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p'_{n_\gamma-1}(a_0, \ldots, a_{n-1}))$ este inclusă în

$$\begin{aligned} f'_\gamma(p'_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p'_{n_\gamma-1}(a_0, \ldots, a_{n-1})) &= f'_\gamma(p'_0, \ldots, p'_{n_\gamma-1})(a_0, \ldots, a_{n-1}) \\ &= p'(a_0, \ldots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

B. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ atunci

$$p'(a_0, \ldots, a_{n-1}) \subseteq \{a \in A \mid \overline{a} = p(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}})\}.$$

Dacă există $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ astfel ca $\mathbf{p} = \mathbf{x}_i$ atunci incluziunea de mai sus devine $\{a_i\} \subseteq \overline{a_i}$ şi este, evident, adevărată.

Presupunem incluziunea demonstrată pentru simbolurile $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1}$ şi considerăm $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1})$. Avem

$$\begin{aligned} p'(a_0, \ldots, a_{n-1}) &= f'_\gamma(p'_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p'_{n_\gamma-1}(a_0, \ldots, a_{n-1})) \\ &= \bigcup \{f'_\gamma(a^0, \ldots, a^{n_\gamma-1}) \mid a^j \in p'_j(a_0, \ldots, a_{n-1}),\ j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\} \\ &\subseteq \{a \mid a \in f'_\gamma(a^0, \ldots, a^{n_\gamma-1}),\ \overline{a^j} = p_j(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}),\ j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\} \\ &= \{a \mid \overline{a} = f_\gamma(\overline{a^0}, \ldots, \overline{a^{n_\gamma-1}}),\ \overline{a^j} = p_j(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}),\ j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\} \\ &= \{a \in A \mid \overline{a} = f_\gamma(p_0(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}))\} \\ &= \{a \in A \mid \overline{a} = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}) = p(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}})\}. \end{aligned}$$

C. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ atunci

$$p'(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \{a \in A \mid \overline{a} = p(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}})\}. \tag{1.7.5}$$

Din (1.7.2) deducem că imaginea oricărei multioperaţii din multialgebra $\mathfrak{A}'$ este o clasă din $\overline{A}$. Dacă $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ atunci există $\gamma < o(\tau)$ şi simbolurile polinomiale n-are $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1}$ astfel ca $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1})$, ceea ce arată că

$$p'(a_0, \ldots, a_{n-1}) = f'_\gamma(p'_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p'_{n_\gamma-1}(a_0, \ldots, a_{n-1}))$$

este o reuniune de clase din $\overline{A}$. Membrul drept din egalitatea (1.7.5) este o clasă din $\overline{A}$ (vezi (1.7.1) şi definiţia relaţiei fundamentale a multialgebrei $\mathfrak{A}$). Toate acestea împreună cu incluziunea stabilită la **B** ne conduc la egalitatea dorită.

D. Relaţia fundamentală $\alpha^*_{\mathfrak{A}'}$ a multialgebrei $\mathfrak{A}'$ este egală cu $\alpha^*_{\mathfrak{A}}$.

Avem $x \alpha_{\mathfrak{A}'} y$ dacă şi numai dacă există $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$, şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ astfel încât $x, y \in p'(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Dacă există $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ astfel ca $\mathbf{p} = \mathbf{x}_i$ atunci $x = y$ deci $x \alpha_{\mathfrak{A}} y$ iar dacă nu există $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ astfel ca $\mathbf{p} = \mathbf{x}_i$, atunci $x, y \in p'(a_0, \ldots, a_{n-1}) \subseteq A$ implică $x \alpha^*_{\mathfrak{A}} y$, deoarece x şi y sunt în aceeaşi clasă din $\overline{A}$. Este clar acum că $\alpha^*_{\mathfrak{A}'} \subseteq \alpha^*_{\mathfrak{A}}$. Incluziunea inversă se obţine astfel: $x \alpha_{\mathfrak{A}} y$ implică existenţa unui număr natural $n \in \mathbb{N}$, unui simbol polinomial $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi a elementelor $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $x, y \in p(a_0, \ldots, a_{n-1})$; folosind (1.7.3) avem $x, y \in p'(a_0, \ldots, a_{n-1})$ şi astfel $x \alpha_{\mathfrak{A}'} y$.

E. Algebrele universale $\overline{\mathfrak{A}'}$ şi $\overline{\mathfrak{A}}$ sunt egale.

Într-adevăr, dacă $\gamma < o(\tau)$ şi $a, a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1} \in A$ cu $a \in f'_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1})$ atunci

$$f'_\gamma(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n_\gamma-1}}) = \overline{a}.$$

Dar $f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1}) \subseteq f'_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1})$, de unde deducem

$$f'_\gamma(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n_\gamma-1}}) = f_\gamma(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n_\gamma-1}}).$$

F. Dacă $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută pe $\overline{\mathfrak{A}}$ atunci $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este satisfăcută pe $\mathfrak{A}'$.

Fie $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. Considerăm $n \in \mathbb{N}$ şi $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ cu proprietatea că identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este verificată pe $\overline{\mathfrak{A}}$. Atunci $q(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}) = r(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}})$.

Dacă $\mathbf{q} = \mathbf{x}_i$, $\mathbf{r} = \mathbf{x}_j$ atunci $i = j$ şi proprietatea are loc în mod trivial (altfel, din $|\overline{A}| > 1$, rezultă că există $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{A}$ astfel încât $\overline{x} \neq \overline{y}$ şi considerând în egalitatea de mai sus $\overline{a_i} = \overline{x}$ şi $\overline{a_j} = \overline{y}$ obţinem o contradicţie).

Dacă $\mathbf{q} = \mathbf{x}_i$ şi $\mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ atunci $\overline{a_i} = r(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}})$ ne conduce, conform (1.7.5), la $a_i \in r'(a_0, \ldots, a_{n-1})$ şi $\mathfrak{A}'$ verifică identitatea $\mathbf{x}_i \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$.

Dacă atât $\mathbf{q}$ cât şi $\mathbf{r}$ sunt din $\mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ atunci din

$$q(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}) = r(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}})$$

deducem, folosind din nou (1.7.5),

$$q'(a_0, \ldots, a_{n-1}) = r'(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

şi demonstraţia este completă. $\square$

Observaţia 1.7.7. Utilizând aceleaşi notaţii ca mai sus, dacă $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ şi $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ pe $\overline{\mathfrak{A}}$ atunci $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ pe $\mathfrak{A}'$.

Observaţia 1.7.8. Multialgebra $\mathfrak{A}'$ poate fi definită chiar dacă $|\overline{A}| = 1$. În acest caz, definiţia multioperaţiei f'_γ $(\gamma < o(\tau))$ este dată de egalitatea $f'_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1}) = A$ pentru orice $a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1} \in A$. Să notăm, însă, că identităţile $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ cu $i \neq j$ sunt satisfăcute pe $\overline{\mathfrak{A}}$, dar nu sunt satisfăcute pe $\mathfrak{A}'$ decât dacă $|A| = 1$. În ceea ce priveşte identităţile $\mathbf{q} = \mathbf{r}$, cu $\mathbf{q}$ sau $\mathbf{r}$ din $\mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$, ele sunt verificate şi pe $\mathfrak{A}'$, măcar în forma slabă.

Observaţia 1.7.9. Între multialgebrele cu suportul A şi algebra fundamentală $\overline{\mathfrak{A}}$, multialgebra $\mathfrak{A}'$ are multioperaţiile „cele mai mari” în sensul că pentru orice multialgebră $\mathfrak{A}'' = (A, (f''_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ pentru care $\overline{\mathfrak{A}''} = \overline{\mathfrak{A}}$, avem $f''_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1}) \subseteq f'_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1})$ pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice $a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1} \in A$.

Observaţia 1.7.10. Clasele din $\overline{A}$ sunt de forma $\{a\}$ sau $f'_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1})$.

Proprietăţile multialgebrei $\mathfrak{A}'$ sugerează construcţia unei clase de multialgebre care face obiectul următoarei propoziţii:

Propoziţia 1.7.11. *Fie $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ o multialgebră de tip τ. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) oricare ar fi $\gamma < o(\tau)$ şi $a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1} \in A$,

$$a \in f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1}) \Rightarrow \overline{a} = f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1});$$

(ii) oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ şi oricare ar fi $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \in A$,

$$q(a_0, \ldots, a_{n-1}) \cap r(b_0, \ldots, b_{n-1}) \neq \emptyset \Rightarrow q(a_0, \ldots, a_{n-1}) = r(b_0, \ldots, b_{n-1}).$$

Demonstraţie. (i)⇒(ii) Fie $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ şi $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$. Avem

$$a \in p(a_0, \dots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \overline{a} = p(a_0, \dots, a_{n-1}). \tag{1.7.6}$$

Într-adevăr, din definiţia relaţiei fundamentale a multialgebrei $\mathfrak{A}$ rezultă că dacă $a \in p(a_0, \dots, a_{n-1})$ atunci $p(a_0, \dots, a_{n-1}) \subseteq \overline{a}$, iar în condiţiile impuse de (i), $p(a_0, \dots, a_{n-1})$ este o reuniune de clase din $\overline{A}$. Aşadar (1.7.6) are loc, ceea ce conduce la (ii).

(ii)⇒(i) Considerăm $\gamma < o(\tau)$, $a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1} \in A$, $a \in f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1})$ şi $b \in A$ cu $a\alpha^* b$ (adică $b \in \overline{a}$). Rezultă că există $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n \in A$ astfel încât

$$a = x_0 \alpha x_1 \alpha \dots \alpha x_{n-1} \alpha x_n = b,$$

adică pentru orice $i \in \{0, \dots, n-1\}$ există $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$ şi $a_0^i, \dots, a_{n_i - 1}^i \in A$ pentru care

$$x_i, x_{i+1} \in p_i(a_0^i, \dots, a_{n_i-1}^i).$$

Putem considera că orice elemente consecutive din şirul $x_0, \dots, x_n$ sunt diferite, de unde rezultă că nici un $\mathbf{p}_i$ nu e egal cu nici un $\mathbf{x}_j$ ($j < \max\{n_i \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$). Folosind aceasta, din

$$p_i(a_0^i, \dots, a_{n_i-1}^i) \cap p_{i+1}(a_0^{i+1}, \dots, a_{n_{i+1}-1}^{i+1}) \neq \emptyset$$

(intersecţia aceasta conţinând pe x_{i+1}) deducem

$$p_i(a_0^i, \dots, a_{n_i-1}^i) = p_{i+1}(a_0^{i+1}, \dots, a_{n_{i+1}-1}^{i+1})$$

pentru orice $i \in \{0, \dots, n-2\}$, ceea ce implică $b \in p_0(a_0^0, \dots, a_{n_0-1}^0)$. Dar

$$a \in p_0(a_0^0, \dots, a_{n_0-1}^0) \cap f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma-1}),$$

de unde rezultă

$$p_0(a_0^0, \dots, a_{n_0-1}^0) = f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma-1})$$

şi astfel $b \in f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma-1})$. □

Observaţia 1.7.12. Se ştie că pentru $m, n \in \mathbb{N}$ cu $m \geq n$ orice imagine de polinom n-ar este imagine a unui polinom m-ar, aşadar în condiţia (ii) din propoziţia de mai sus $\mathbf{q}$ şi $\mathbf{r}$ nu este necesar să fie considerate de aceeaşi aritate.

Exemplul 1.7.13. Pentru un semihipergrup $(H, \circ)$, condiţia (ii) din propoziţia de mai sus se scrie astfel: oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq 2$ şi oricare ar fi $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in H$,

$$a_1 \circ \cdots \circ a_m \cap b_1 \circ \cdots \circ b_n \neq \emptyset \Rightarrow a_1 \circ \cdots \circ a_m = b_1 \circ \cdots \circ b_n.$$

Această condiţie defineşte *semihipergrupul* $(H, \circ)$ ca fiind *complet* (vezi [10, Definiţia 137]).

Rezultă că o multialgebră $\mathfrak{A}$ care verifică condiţiile echivalente (i) şi (ii) din Propoziţia 1.7.11 generalizează noţiunea de semihipergrup complet, ceea ce sugerează:

Definiţia 1.7.1. O multialgebră $\mathfrak{A}$ care verifică condiţiile echivalente din Propoziţia 1.7.11 se numeşte *multialgebră completă.*

Observaţia 1.7.14. În [10] *hipergrupurile complete* sunt definite ca fiind acele semihipergrupuri complete care sunt hipergrupuri. Dar oricare ar fi a şi b două elemente dintr-un hipergrup complet $(H, \circ)$ există $b' \in H$ astfel încât $a/b = a \circ b'$ şi $b \backslash a = b' \circ a$ (vezi [10, Teorema 146]), ceea permite ca în caracterizarea completitudinii la hipergrupuri să nu fie necesară considerarea explicită a multioperaţiilor / şi \.

Observaţia 1.7.15. Pentru o multialgebră completă $\mathfrak{A}$ de tip τ avem: dacă $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ atunci există $\gamma < o(\tau)$ cu proprietatea că pentru orice $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, există $b_0, \ldots, b_{n_\gamma - 1} \in A$ astfel încât

$$p(a_0, \ldots, a_{n-1}) = f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma - 1}).$$

Într-adevăr, dacă $A = \emptyset$ egalitatea de mai sus are loc în mod trivial. Să presupunem, deci, că $A \neq \emptyset$. Dacă $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ atunci există $\gamma < o(\tau)$ şi $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ astfel încât $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1})$. Cum pentru orice elemente $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, $p(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq \emptyset$, rezultă că există

$$a \in p(a_0, \ldots, a_{n-1}) = f_\gamma(p_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma - 1}(a_0, \ldots, a_{n-1})).$$

Deducem că există $b_0 \in p_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, b_{n_\gamma - 1} \in p_{n_\gamma - 1}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ pentru care avem $a \in f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma - 1})$, iar cum $a \in p(a_0, \ldots, a_{n-1}) \cap f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma - 1})$ avem, conform condiţiei (ii) din Propoziţia 1.7.11, egalitatea $p(a_0, \ldots, a_{n-1}) = f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma - 1})$.

Observaţia 1.7.16. Pentru o multialgebră completă $\mathfrak{A}$ clasele din $\overline{A}$ au forma $\{a\}$ sau $f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1})$ cu $a, a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1} \in A$ şi $\gamma < o(\tau)$. Evident, cele două situaţii nu se exclud una pe cealaltă, cel mai clar exemplu în acest sens fiind cazul în care $\mathfrak{A}$ este o algebră universală.

Observaţia 1.7.17. Multialgebra $\mathfrak{A}'$ din demonstraţia Propoziţiei 1.7.6 este completă.

Observaţia 1.7.18. Pentru orice multialgebră completă $\mathfrak{A}$ relaţia $\alpha_{\mathfrak{A}}$ este tranzitivă şi, în consecinţă, are loc egalitatea $\alpha_{\mathfrak{A}} = \alpha_{\mathfrak{A}}^*$.

Într-adevăr, dacă $x\alpha_{\mathfrak{A}}y$ şi $y\alpha_{\mathfrak{A}}z$ atunci există $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{P}^{(m)}(\tau)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi elementele $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \in A$ astfel încât

$$x, y \in q(a_0, \dots, a_{m-1}) \text{ şi } y, z \in r(b_0, \dots, b_{n-1}).$$

În cazul în care $\mathbf{q} = \mathbf{x}_i$ sau $\mathbf{r} = \mathbf{x}_j$ cu $i \in \{0, \dots, m-1\}$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$ este evident faptul că $x\alpha_{\mathfrak{A}}z$. În caz contrar, din $y \in q(a_0, \dots, a_{m-1}) \cap r(b_0, \dots, b_{n-1})$ deducem că $q(a_0, \dots, a_{m-1}) \cap r(b_0, \dots, b_{n-1}) \neq \emptyset$ iar, cum multialgebra $\mathfrak{A}$ este completă, avem

$$q(a_0, \dots, a_{m-1}) = r(b_0, \dots, b_{n-1})$$

ceea ce conduce din nou la $x\alpha_{\mathfrak{A}}z$.

Observaţia 1.7.19. Multialgebrele complete de tip τ formează o subcategorie plină a categoriei $\mathbf{Malg}(\tau)$ pe care o notăm $\mathbf{CMalg}(\tau)$.

Propoziţia 1.7.20. *Fie $\mathfrak{A}$ o multialgebră de tip τ. Multialgebra $\mathfrak{A}$ este completă dacă şi numai dacă există o algebră universală de tip τ, $\mathfrak{B} = (B, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$, şi o partiţie $\{A_b \mid b \in B\}$ a lui A astfel încât pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice $a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1} \in A$, cu $a_i \in A_{b_i}$, $i \in \{0, \dots, n_\gamma - 1\}$, avem*

$$f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1}) = A_{f_\gamma(b_0, \dots, b_{n_\gamma - 1})}.$$

Demonstraţie. Dacă multialgebra $\mathfrak{A}$ este completă atunci luăm $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{A}}$ şi $A_b = \varphi_A^{-1}(b)$ pentru orice $b \in B$. Oricare ar fi $\gamma < o(\tau)$ şi $a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1} \in A$, există $b_0, \dots, b_{n_\gamma - 1} \in B$, unic determinate, astfel încât $a_i \in A_{b_i}$ (i.e. $\varphi_A(a_i) = b_i$) pentru orice $i \in \{0, \dots, n_\gamma - 1\}$. Din Propoziţia 1.7.11 avem $f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1}) = \varphi_A^{-1}(\overline{a})$, pentru orice $a \in f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1})$. Aşadar

$$\overline{a} = \varphi_A(a) = \varphi_A(f_\gamma(a_0, \dots, a_{n_\gamma - 1})) = f_\gamma(\varphi_A(a_0), \dots, \varphi_A(a_{n_\gamma - 1})) = f_\gamma(b_0, \dots, b_{n_\gamma - 1}),$$

de unde deducem $f_\gamma(a_0,\ldots,a_{n_\gamma-1}) = \varphi_A^{-1}(f_\gamma(b_0,\ldots,b_{n_\gamma-1})) = A_{f_\gamma(b_0,\ldots,b_{n_\gamma-1})}$.

Reciproc, să observăm, în primul rând, că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$, $a_0,\ldots,a_{n-1} \in A$ şi $b_0,\ldots,b_{n-1} \in B$ cu proprietatea că $a_i \in A_{b_i}$ pentru orice $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ atunci

$$p(a_0,\ldots,a_{n-1}) \subseteq A_{p(b_0,\ldots,b_{n-1})}. \tag{1.7.7}$$

Într-adevăr, dacă există $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ astfel ca $\mathbf{p} = \mathbf{x}_i$ atunci incluziunea de mai sus devine $\{a_i\} \subseteq A_{b_i}$ şi este adevărată, iar dacă presupunem incluziunea adevărată pentru simbolurile $\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_{n_\gamma-1}$ şi luăm $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_{n_\gamma-1})$ atunci

$$\begin{aligned} p(a_0,\ldots,a_{n-1}) &= f_\gamma(p_0(a_0,\ldots,a_{n-1}),\ldots,p_{n_\gamma-1}(a_0,\ldots,a_{n-1})) \\ &\subseteq f_\gamma(A_{p_0(b_0,\ldots,b_{n-1})},\ldots,A_{p_{n_\gamma-1}(b_0,\ldots,b_{n-1})}) \\ &= A_{f_\gamma(p_0(b_0,\ldots,b_{n-1}),\ldots,p_{n_\gamma-1}(b_0,\ldots,b_{n-1}))} \\ &= A_{p(b_0,\ldots,b_{n-1})}. \end{aligned}$$

Dacă, în plus, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0,\ldots,n-1\}\}$ atunci există $\gamma < o(\tau)$ şi simbolurile polinomiale n-are $\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_{n_\gamma-1}$ astfel ca $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_{n_\gamma-1})$; astfel

$$p(a_0,\ldots,a_{n-1}) = f_\gamma(p_0(a_0,\ldots,a_{n-1}),\ldots,p_{n_\gamma-1}(a_0,\ldots,a_{n-1}))$$

este o reuniune de mulţimi A_b şi ţinând seama de (1.7.7) avem

$$p(a_0,\ldots,a_{n-1}) = A_{p(b_0,\ldots,b_{n-1})}.$$

Finalizarea demonstraţiei se face prin aplicarea condiţiei (*ii*) din Propoziţia 1.7.11. □

Observaţia 1.7.21. Putem construi ca mai sus multialgebre $\mathfrak{A}$ cu algebra fundamentală izomorfă cu $\mathfrak{B}$ considerând în familia $(A_b \mid b \in B)$, $|A_b| = 1$ pentru orice $b \in B$ care nu poate fi scris sub forma $b = f_\gamma(b_0,\ldots,b_{n_\gamma-1})$, cu $\gamma < o(\tau)$ şi $b_0,\ldots,b_{n_\gamma-1} \in B$. Neluând în considerare această condiţie, obţinem, prin metoda sugerată de propoziţia anterioară, o multialgebră completă a cărei algebră fundamentală conţine pe $\mathfrak{B}$ ca subalgebră.

1.8 Identităţi şi algebre universale obţinute ca multialgebre factor

Am văzut în paragraful anterior că dacă $\mathfrak{A}$ este o multialgebră şi $\rho \in E_{ua}(\mathfrak{A})$ atunci orice identitate verificată pe $\mathfrak{A}$, în formă tare sau slabă, este verificată şi pe algebra $\mathfrak{A}/\rho$.

Observaţia 1.8.1. Chiar dacă o identitate $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ nu e satisfăcută pe $\mathfrak{A}$ putem obţine o multialgebră cât a multialgebrei $\mathfrak{A}$ care este o algebră universală ce satisface identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ dacă factorizăm pe $\mathfrak{A}$ după o relaţie din $E_{ua}(\mathfrak{A})$ care include relaţia

$$R_{\mathbf{qr}} = \{(x,y) \in A \times A \mid x \in q(a_0,\ldots,a_{n-1}), y \in r(a_0,\ldots,a_{n-1}), a_0,\ldots,a_{n-1} \in A\}.$$

Mai mult, fiecare relaţie din $E_{ua}(\mathfrak{A})$ care dă în urma factorizării o algebră care verifică identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ trebuie să conţină relaţia $R_{\mathbf{qr}}$. Deci cea mai mică relaţie din $E_{ua}(\mathfrak{A})$ pentru care multialgebra factor este o algebră ce verifică identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este relaţia

$$\alpha(R_{\mathbf{qr}}) = \bigcap\{\rho \in E_{ua}(\mathfrak{A}) \mid R_{\mathbf{qr}} \subseteq \rho\}.$$

Notaţie. În cele ce urmează, vom nota $\alpha(R_{\mathbf{qr}})$ cu $\alpha^*_{\mathbf{qr}}$.

Observaţia 1.8.2. Este imediat faptul că pentru relaţia fundamentală α^* a multialgebrei $\mathfrak{A}$ avem $\alpha^* = \alpha(\emptyset) = \alpha(\delta_A) = \alpha^*_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0}$ şi $\alpha^* \subseteq \alpha^*_{\mathbf{qr}}$ pentru orice simboluri polinomiale $\mathbf{q}, \mathbf{r}$.

În continuare vom caracteriza relaţia $\alpha^*_{\mathbf{qr}}$ cu ajutorul funcţiilor algebrice din $P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$. Din Observaţia 1.2.5 deducem că compunerea a două funcţii algebrice din $P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ este tot o funcţie algebrică din $P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$.

Teorema 1.8.3. *Relaţia $\alpha^*_{\mathbf{qr}}$ este închiderea tranzitivă a relaţiei $\alpha_{\mathbf{qr}} \subseteq A \times A$ definită prin $x\alpha_{\mathbf{qr}}y$ dacă şi numai dacă există $p \in P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $a_0,\ldots,a_{n-1} \in A$ astfel încât*

$$x \in p(q(a_0,\ldots,a_{n-1})),\ y \in p(r(a_0,\ldots,a_{n-1})) \text{ sau}$$
$$y \in p(q(a_0,\ldots,a_{n-1})),\ x \in p(r(a_0,\ldots,a_{n-1})).$$

Demonstraţie. **A.** Relaţia $\alpha^*_{\mathbf{qr}}$ este o relaţie de echivalenţă care include pe $R_{\mathbf{qr}}$.

Evident, $\alpha_{\mathbf{qr}}$ este simetrică. Luând pentru un $a \in A$ oarecare, $p = c^1_a$ se obţine reflexivitatea relaţiei $\alpha_{\mathbf{qr}}$. Rezultă că $\alpha^*_{\mathbf{qr}}$ este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A ce conţine pe $\alpha_{\mathbf{qr}}$. Incluziunea $R_{\mathbf{qr}} \subseteq \alpha^*_{\mathbf{qr}}$ se deduce considerând $p = e^1_0$.

B. Dacă $f \in P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi elementele $a, b \in A$ verifică $a\alpha^*_{\mathbf{qr}}b$ atunci $f(a)\overline{\overline{\alpha^*_{\mathbf{qr}}}}f(b)$.

Conform definiţiei lui $\alpha^*_{\mathbf{qr}}$ rezultă că există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $z_0,\ldots,z_m \in A$ astfel încât $a = z_0\alpha_{\mathbf{qr}}z_1\alpha_{\mathbf{qr}}\ldots\alpha_{\mathbf{qr}}z_m = b$. Considerăm $j \in \{0,\ldots,m-1\}$. Cum $z_j\alpha_{\mathbf{qr}}z_{j+1}$ există $p \in P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $a_0,\ldots,a_{n-1} \in A$ pentru care

$$z_j \in p(q(a_0,\ldots,a_{n-1})),\ z_{j+1} \in p(r(a_0,\ldots,a_{n-1})) \text{ sau}$$
$$z_{j+1} \in p(q(a_0,\ldots,a_{n-1})),\ z_j \in p(r(a_0,\ldots,a_{n-1})).$$

Dar $p' = f \circ p \in P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$, şi astfel avem

$$f(z_j) \subseteq p'(q(a_0, \ldots, a_{n-1})),\ f(z_{j+1}) \subseteq p'(r(a_0, \ldots, a_{n-1})) \text{ sau}$$
$$f(z_{j+1}) \subseteq p'(q(a_0, \ldots, a_{n-1})),\ f(z_j) \subseteq p'(r(a_0, \ldots, a_{n-1})).$$

Oricum, pentru orice $u_j \in f(z_j)$ şi orice $u_{j+1} \in f(z_{j+1})$ avem $u_j \alpha_{\mathbf{qr}} u_{j+1}$ şi, în consecinţă, $u_0 \alpha_{\mathbf{qr}}^* u_m$. Cum $u_0 \in f(a)$ şi $u_m \in f(b)$ sunt arbitrare, obţinem $f(a)\overline{\overline{\alpha_{\mathbf{qr}}^*}}f(b)$.

C. Multialgebra factor $\mathfrak{A}/\alpha_{\mathbf{qr}}^*$ este o algebră universală în care are loc identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$.

Fie $\gamma < o(\tau)$ şi elementele arbitrare $a, b, x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1} \in A$ astfel ca $a\alpha_{\mathbf{qr}}^* b$. Aplicând **B** pentru funcţiile algebrice unare (din $P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$)

$$f_\gamma(e_0^1, c_{x_1}^1, \ldots, c_{x_{n_\gamma - 1}}^1), f_\gamma(c_{x_0}^1, e_0^1, c_{x_2}^1, \ldots, c_{x_{n_\gamma - 1}}^1), \ldots, f_\gamma(c_{x_0}^1, \ldots, c_{x_{n_\gamma - 2}}^1, e_0^1)$$

rezultă că $\alpha_{\mathbf{qr}}^*$ verifică (b) din Propoziţia 1.6.1, aşadar $\mathfrak{A}/\alpha_{\mathbf{qr}}^*$ este o algebră universală. Observaţia 1.8.1 şi **A** completează demonstraţia afirmaţiei **C**.

D. Dacă $\rho \in E_{ua}(\mathfrak{A})$ astfel încât $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ în $\mathfrak{A}/\rho$ atunci $\alpha_{\mathbf{qr}}^* \subseteq \rho$.

Vom demonstra aceasta prin inducţie după paşii de construcţie a unei funcţii algebrice din $P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ că dacă $p \in P^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ şi $x \in p(q(a_0, \ldots, a_{n-1}))$, $y \in p(r(a_0, \ldots, a_{n-1}))$ (sau $x \in p(r(a_0, \ldots, a_{n-1}))$, $y \in p(q(a_0, \ldots, a_{n-1}))$) atunci $x\rho y$.

Pasul 1. Dacă $a \in A$ şi $p = c_a^1$ atunci $x = y = a$ şi $x\rho y$.

Pasul 2. Dacă p este proiecţia canonică e_0^1 atunci $x \in q(a_0, \ldots, a_{n-1})$, $y \in r(a_0, \ldots, a_{n-1})$ (sau $x \in r(a_0, \ldots, a_{n-1})$, $y \in q(a_0, \ldots, a_{n-1})$) şi folosind Observaţia 1.8.1 avem $(x, y) \in R_{\mathbf{qr}} \subseteq \rho$ (sau $(x, y) \in R_{\mathbf{qr}}^{-1} \subseteq \rho^{-1} = \rho$).

Pasul 3. Considerăm că afirmaţia a fost demonstrată pentru $p_0, \ldots, p_{n_\gamma - 1}$ ($\gamma < o(\tau)$) şi fie $p = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma - 1})$. Dacă

$$\begin{aligned} x \in p(q(a_0, \ldots, a_{n-1})) &= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma - 1})(q(a_0, \ldots, a_{n-1})) \\ &= f_\gamma(p_0(q(a_0, \ldots, a_{n-1})), \ldots, p_{n_\gamma - 1}(q(a_0, \ldots, a_{n-1}))) \text{ şi} \\ y \in p(r(a_0, \ldots, a_{n-1})) &= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma - 1})(r(a_0, \ldots, a_{n-1})) \\ &= f_\gamma(p_0(r(a_0, \ldots, a_{n-1})), \ldots, p_{n_\gamma - 1}(r(a_0, \ldots, a_{n-1}))) \end{aligned}$$

atunci există $x_i \in p_i(q(a_0, \ldots, a_{n-1}))$, $y_i \in p_i(r(a_0, \ldots, a_{n-1}))$ ($i \in \{0, \ldots n_\gamma - 1\}$) astfel încât $x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1})$ şi $y \in f_\gamma(y_0, \ldots, y_{n_\gamma - 1})$. Cum $x_i \rho y_i$ pentru toţi $i \in \{0, \ldots n_\gamma - 1\}$, folosind (b) din Propoziţia 1.6.1, rezultă că $x\rho y$.

Deducem că $\alpha_{\mathbf{qr}} \subseteq \rho$ şi, ca urmare, $\alpha_{\mathbf{qr}}^* \subseteq \rho$. □

Exemplul 1.8.4. Fiind dat un semihipergrup $(H, \circ)$, în [26] este caracterizată cea mai mică echivalenţă tare regulată pe H pentru care multialgebra factor este un semigrup comutativ. Această relaţie, notată cu γ^*, este închiderea tranzitivă a relaţiei $\gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \gamma_n$ unde $\gamma_1 = \delta_H$ şi, pentru orice $n > 1$, relaţia γ_n este definită prin

$$x \gamma_n y \Leftrightarrow \exists z_1, \dots, z_n \in H,\ \exists \sigma \in S_n:\ x \in z_1 \circ \cdots \circ z_n,\ y \in z_{\sigma(1)} \circ \cdots \circ z_{\sigma(n)}.$$

(S_n notează mulţimea permutărilor mulţimii $\{1, \dots, n\}$).

Cum mulţimea formată din transpoziţiile $(1,2), (2,3), \dots, (n-1, n)$ generează grupul S_n rezultă că γ^* este închiderea tranzitivă a relaţiei $\gamma' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \gamma'_n$, unde $\gamma'_1 = \delta_H$ şi pentru $n > 1$, $x \gamma'_n y$ dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} \exists z_1, \dots, z_n \in H,\ \exists i \in \{1, \dots, n-1\} : x \in z_1 \circ \cdots \circ z_{i-1} \circ (z_i \circ z_{i+1}) \circ z_{i+2} \circ \cdots \circ z_n, \\ y \in z_1 \circ \cdots \circ z_{i-1} \circ (z_{i+1} \circ z_i) \circ z_{i+2} \circ \cdots \circ z_n. \end{aligned}$$

E clar că $\gamma' = \alpha_{\mathbf{qr}}$ unde $\mathbf{q} = \mathbf{x}_0 \circ \mathbf{x}_1$ şi $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_0$.

Tot în [26] se demonstrează că dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup atunci relaţia γ este tranzitivă şi $\gamma^* = \gamma$ este cea mai mică echivalenţă pe H pentru care H/γ^* este un grup comutativ.

Observaţia 1.8.5. Putem face şi aici o observaţie asemănătoare cu Observaţia 1.6.16. Dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup şi ρ este o echivalenţă tare regulată pe H atunci H/ρ este un grup. Dacă $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ sunt două simboluri polinomiale n-are atunci cea mai mică echivalenţă pe H pentru care hipergrupoidul factor este un semigrup care satisface $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este închiderea tranzitivă ψ^* a relaţiei

$$\begin{aligned} \psi = \bigcup \{ p(q(a_1, \dots, a_n)) \times p(r(a_1, \dots, a_n)) \cup p(r(a_1, \dots, a_n)) \times p(q(a_1, \dots, a_n)) \mid \\ p \in P_H^1(\mathfrak{P}^*(H, \circ)),\ a_1, \dots, a_n \in H \}. \end{aligned}$$

Cum această relaţie este tare regulată, semigrupul obţinut prin factorizare este un grup. Înseamnă că cea mai mică relaţie $\alpha^*_{\mathbf{qr}}$ pe hipergrupul $(H, \circ, /, \backslash)$ pentru care obţinem în urma factorizării un grup pe care este satisfăcută identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este inclusă în ψ^*. Cum

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{qr}} = \bigcup \{ p(q(a_1, \dots, a_n)) \times p(r(a_1, \dots, a_n)) \cup p(r(a_1, \dots, a_n)) \times p(q(a_1, \dots, a_n)) \mid \\ p \in P_H^1(\mathfrak{P}^*(H, \circ, /, \backslash)),\ a_1, \dots, a_n \in H \} \end{aligned}$$

şi $P_H^1(\mathfrak{P}^*(H, \circ)) \subseteq P_H^1(\mathfrak{P}^*(H, \circ, /, \backslash))$ rezultă $\psi \subseteq \alpha_{\mathbf{qr}}$, deci $\psi^* \subseteq \alpha^*_{\mathbf{qr}}$ şi astfel, $\psi^* = \alpha^*_{\mathbf{qr}}$.

Deci cea mai mică echivalenţă tare regulată pe H pentru care hipergrupul factor este un grup ce verifică identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ poate fi obţinută considerând în caracterizarea dată de Teorema 1.8.3 doar acele funcţii algebrice p care se obţin cu multioperaţia $\circ$ (cu alte cuvinte, nu e necesar să folosim multioperaţiile $/$ şi $\backslash$ în construcţia lui p).

Din Teorema 1.8.3 şi Observaţia 1.8.2 deducem imediat:

Corolarul 1.8.6. *Relaţia fundamentală α^* a multialgebrei $\mathfrak{A}$ este închiderea tranzitivă a relaţiei $\alpha' \subseteq A \times A$ definită astfel: pentru $x, y \in A$ avem $x\alpha' y$ dacă şi numai dacă există $p \in P_A^{(1)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}))$ şi $a \in A$ astfel încât $x, y \in p(a)$.*

Reamintim că pentru orice multialgebră $\mathfrak{A} = (A, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ există o algebră universală $\mathfrak{B} = (B, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ şi o relaţie de echivalenţă ρ pe B astfel încât $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}/\rho$.

Fie $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$, fie $\mathfrak{B}$ o algebră universală de tip τ şi fie ρ o relaţie de echivalenţă pe B. Notăm cu $\rho_{\mathbf{qr}}$ cea mai mică mai mică relaţie de echivalenţă pe B care conţine pe ρ şi toate perechile $(q(b_0, \ldots, b_{n-1}), r(b_0, \ldots, b_{n-1}))$ cu $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$. Evident, cea mai mică relaţie de congruenţă pe $\mathfrak{B}$ care conţine relaţia $\rho_{\mathbf{qr}}$, pe care o notăm $\theta(\rho_{\mathbf{qr}})$, este cea mai mică relaţie de congruenţă pe $\mathfrak{B}$ ce conţine

$$\rho \cup \{(q(b_0, \ldots, b_{n-1}), r(b_0, \ldots, b_{n-1})) \mid b_0, \ldots, b_{n-1} \in B\}.$$

In [29, Teorema 10.4] este prezentată o caracterizare pentru cea mai mică congruenţă a unei algebre universale care conţine o relaţie dată. Conform cu această caracterizare, $x\theta(\rho_{\mathbf{qr}})y$ dacă şi numai dacă există $m \in \mathbb{N}^*$, un şir $x = t_0, t_1, \ldots, t_m = y$, perechile de elemente $(x_i, y_i) \in \rho \cup \{(q(b_0, \ldots, b_{n-1}), r(b_0, \ldots, b_{n-1})) \mid b_0, \ldots, b_{n-1} \in B\}$ şi funcţiile algebrice unare p_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, astfel încât

$$\{p_i(x_i), p_i(y_i)\} = \{t_{i-1}, t_i\},\ i \in \{1, \ldots, m\}.$$

E clar că dacă luăm $\mathbf{q} = \mathbf{r} = \mathbf{x}_0$ atunci $\theta(\rho_{\mathbf{qr}}) = \theta(\rho_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0}) = \theta(\rho)$ este cea mai mică congruenţă pe $\mathfrak{B}$ care conţine pe ρ.

Lema 1.8.7. *Dacă $p \in P_{B/\rho}^{(n)}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{B}/\rho))$ şi $x, y, z_0, \ldots, z_{n-1} \in B$ au proprietatea că*

$$\rho\langle x\rangle, \rho\langle y\rangle \in p(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)$$

atunci $x\theta(\rho)y$.

Demonstraţie. **Pasul 1.** Dacă există $b \in B$ astfel încât $p = c^n_{\rho\langle b\rangle}$ atunci $\rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle = \rho\langle b\rangle$ şi astfel $x\theta(\rho)y$.

Pasul 2. Dacă există $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ astfel ca $p = e^n_i$ atunci $\rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle = \rho\langle z_i\rangle$ şi avem $x\theta(\rho)y$.

Pasul 3. Considerăm afirmaţia demonstrată pentru $p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1}$ ($\gamma < o(\tau)$) şi luăm $p = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})$. Cum

$$\begin{aligned} p(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle) &= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle) \\ &= f_\gamma(p_0(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle), \ldots, p_{n_\gamma-1}(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)) \end{aligned}$$

din $\rho\langle x\rangle, \rho\langle y\rangle \in p(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)$ deducem că există elementele $x_i, y_i \in B$ cu

$$\rho\langle x_i\rangle, \rho\langle y_i\rangle \in p_i(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)$$

astfel încât

$$\rho\langle x\rangle \in f_\gamma(\rho\langle x_0\rangle, \ldots, \rho\langle x_{n_\gamma-1}\rangle),\ \rho\langle y\rangle \in f_\gamma(\rho\langle y_0\rangle, \ldots, \rho\langle y_{n_\gamma-1}\rangle).$$

Din definiţia multioperaţiei f_γ în $\mathfrak{B}/\rho$ rezultă că există $x'_i, y'_i \in B$ cu $x_i\rho x'_i$ şi $y_i\rho y'_i$ ($i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$) astfel încât

$$x = f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1}),\ y = f_\gamma(y'_0, \ldots, y'_{n_\gamma-1}).$$

Cum afirmaţia are loc pentru $p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1}$ deducem că $x_i\theta(\rho)y_i$ pentru toţi $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Aşadar $x'_i\rho x_i,\ x_i\theta(\rho)y_i,\ y_i\rho y'_i$ ceea ce implică $x'_i\theta(\rho)y'_i$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Dar $\theta(\rho)$ este congruenţă pe $\mathfrak{B}$ de unde rezultă că

$$x = f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})\theta(\rho)f_\gamma(y'_0, \ldots, y'_{n_\gamma-1}) = y$$

şi lema este demonstrată. □

Lema 1.8.8. *Dacă* $p \in P^{(1)}_{B/\rho}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{B}/\rho))$ *şi* $x, y, z_0, \ldots, z_{n-1} \in B$ *sunt astfel încât*

$$\rho\langle x\rangle \in p(q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)) \text{ şi } \rho\langle y\rangle \in p(r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle))$$

atunci $x\theta(\rho_{\mathbf{qr}})y$.

Demonstraţie. **Pasul 1.** Dacă există $b \in B$ astfel încât $p = c^1_{\rho\langle b\rangle}$ atunci $\rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle = \rho\langle b\rangle$ şi astfel $x\theta(\rho_{\mathbf{qr}})y$.

Pasul 2. Dacă $p = e^1_0$ atunci

$$\rho\langle x\rangle \in q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle) \text{ şi } \rho\langle y\rangle \in r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle).$$

Conform Observaţiei 1.5.7 avem

$$\rho\langle q(z_0, \ldots, z_{n-1})\rangle \in q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle) \text{ şi } \rho\langle r(z_0, \ldots, z_{n-1})\rangle \in r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle).$$

Folosind lema anterioară, rezultă că $x\theta(\rho)q(z_0, \ldots, z_{n-1})$ şi $y\theta(\rho)r(z_0, \ldots, z_{n-1})$. Dar $\theta(\rho) \subseteq \theta(\rho_{\mathbf{qr}})$ şi $q(z_0, \ldots, z_{n-1})\theta(\rho_{\mathbf{qr}})r(z_0, \ldots, z_{n-1})$ aşadar, $x\theta(\rho_{\mathbf{qr}})y$.

Pasul 3. Considerăm afirmaţia demonstrată pentru $p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1}$ $(\gamma < o(\tau))$ şi luăm $p = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})$. Cum

$$\begin{aligned}
&p(q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)) = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle))\\
&= f_\gamma(p_0(q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)), \ldots, p_{n_\gamma-1}(q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle))) \text{ şi}\\
&p(r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)) = f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle))\\
&= f_\gamma(p_0(r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)), \ldots, p_{n_\gamma-1}(r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)))
\end{aligned}$$

din $\rho\langle x\rangle \in p(q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle))$ şi $\rho\langle y\rangle \in p(r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle))$ deducem că există $x_i, y_i \in B$ cu

$$\rho\langle x_i\rangle \in p_i(q(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle)) \text{ şi } \rho\langle y_i\rangle \in p_i(r(\rho\langle z_0\rangle, \ldots, \rho\langle z_{n-1}\rangle))$$

astfel încât

$$\rho\langle x\rangle \in f_\gamma(\rho\langle x_0\rangle, \ldots, \rho\langle x_{n_\gamma-1}\rangle),\ \rho\langle y\rangle \in f_\gamma(\rho\langle y_0\rangle, \ldots, \rho\langle y_{n_\gamma-1}\rangle).$$

Din definiţia multioperaţiei f_γ în $\mathfrak{B}/\rho$ rezultă că există $x'_i, y'_i \in B$ cu $x_i\rho x'_i$ şi $y_i\rho y'_i$ $(i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\})$ astfel încât

$$x = f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1}),\ y = f_\gamma(y'_0, \ldots, y'_{n_\gamma-1}).$$

Cum afirmaţia din enunţ are loc pentru $p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1}$ rezultă că $x_i\theta(\rho_{\mathbf{qr}})y_i$ pentru toţi $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Aşadar $x'_i\rho x_i,\ x_i\theta(\rho_{\mathbf{qr}})y_i,\ y_i\rho y'_i$ ceea ce implică $x'_i\theta(\rho_{\mathbf{qr}})y'_i$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Dar $\theta(\rho_{\mathbf{qr}})$ este o congruenţă pe $\mathfrak{B}$, deci

$$x = f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})\theta(\rho_{\mathbf{qr}})f_\gamma(y'_0, \ldots, y'_{n_\gamma-1}) = y$$

şi lema este demonstrată. $\square$

Cu ajutorul lemelor de mai sus stabilim:

Teorema 1.8.9. $(\mathfrak{B}/\rho)/\alpha^*_{\mathbf{qr}} \cong \mathfrak{B}/\theta(\rho_{\mathbf{qr}})$.

Demonstraţie. **A.** Pentru două elemente $a, b \in B$ avem $\rho\langle a\rangle\alpha^*_{\mathbf{qr}}\rho\langle b\rangle$ dacă şi numai dacă $a\theta(\rho_{\mathbf{qr}})b$.

Dacă $\rho\langle a\rangle\alpha^*_{\mathbf{qr}}\rho\langle b\rangle$ atunci există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $z_0, \ldots, z_m \in B$ astfel încât

$$\rho\langle a\rangle = \rho\langle z_0\rangle\alpha_{\mathbf{qr}}\rho\langle z_1\rangle\alpha_{\mathbf{qr}}\ldots\alpha_{\mathbf{qr}}\rho\langle z_m\rangle = \rho\langle b\rangle.$$

Deci, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, m\}$ există $p_i \in P^{(1)}_{B/\rho}(\mathfrak{P}^*(\mathfrak{B}/\rho))$ şi $z^i_0, \ldots, z^i_{n-1} \in B$ astfel ca

$$\begin{aligned}&\rho\langle z_{i-1}\rangle \in p_i(q(\rho\langle z^i_0\rangle, \ldots, \rho\langle z^i_{n-1}\rangle)),\ \rho\langle z_i\rangle \in p_i(r(\rho\langle z^i_0\rangle, \ldots, \rho\langle z^i_{n-1}\rangle)) \text{ sau}\\&\rho\langle z_{i-1}\rangle \in p_i(r(\rho\langle z^i_0\rangle, \ldots, \rho\langle z^i_{n-1}\rangle)),\ z_i\rangle \in p_i(q(\rho\langle z^i_0\rangle, \ldots, \rho\langle z^i_{n-1}\rangle)).\end{aligned}$$

Conform Lemei 1.8.8 rezultă că pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$ avem $z_{i-1}\theta(\rho_{\mathbf{qr}})z_i$. Deducem că $z_0\theta(\rho_{\mathbf{qr}})z_m$. Dar $a\rho z_0$, $z_m\rho b$ şi $\rho \subseteq \theta(\rho_{\mathbf{qr}})$ şi astfel avem $a\theta(\rho_{\mathbf{qr}})b$.

Reciproc, dacă $a\theta(\rho_{\mathbf{qr}})b$ atunci există $m \in \mathbb{N}^*$, un şir $a = t_0, t_1, \ldots, t_m = b$, perechile de elemente $(x_i, y_i) \in \rho \cup \{(q(b_0, \ldots, b_{n-1}), r(b_0, \ldots, b_{n-1})) \mid b_0, \ldots, b_{n-1} \in B\}$ şi funcţiile algebrice unare p_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ asfel încât

$$\{t_{i-1}, t_i\} = \{p_i(x_i), p_i(y_i)\},\ i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Avem atunci $\{\rho\langle t_{i-1}\rangle, \rho\langle t_i\rangle\} = \{\rho\langle p_i(x_i)\rangle, \rho\langle p_i(y_i)\rangle\}$.

Dacă $(x_i, y_i) \in \rho$ atunci $\rho\langle x_i\rangle = \rho\langle y_i\rangle$ şi cum

$$\rho\langle p_i(x_i)\rangle \in p_i(\rho\langle x_i\rangle) = p_i(\rho\langle y_i\rangle) \ni \rho\langle p_i(y_i)\rangle$$

deducem că $\rho\langle t_{i-1}\rangle\alpha^*\rho\langle t_i\rangle$, aşadar $\rho\langle t_{i-1}\rangle\alpha^*_{\mathbf{qr}}\rho\langle t_i\rangle$.

Dacă există $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ atfel ca $(x_i, y_i) = (q(b_0, \ldots, b_{n-1}), r(b_0, \ldots, b_{n-1}))$, din

$$\begin{aligned}\rho\langle p_i(x_i)\rangle &= \rho\langle p_i(q(b_0, \ldots, b_{n-1}))\rangle \in p_i(\rho\langle q(b_0, \ldots, b_{n-1})\rangle)\\&\subseteq p_i(q(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n-1}\rangle)),\\\rho\langle p_i(y_i)\rangle &= \rho\langle p_i(r(b_0, \ldots, b_{n-1}))\rangle \in p_i(\rho\langle r(b_0, \ldots, b_{n-1})\rangle)\\&\subseteq p_i(r(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n-1}\rangle))\end{aligned}$$

rezultă că $\rho\langle t_{i-1}\rangle\alpha^*_{\mathbf{qr}}\rho\langle t_i\rangle$.

Astfel am demonstrat că $\rho\langle a\rangle = \rho\langle t_0\rangle\alpha^*_{\mathbf{qr}}\rho\langle t_m\rangle = \rho\langle b\rangle$.

B. Corespondenţa $\alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b\rangle\rangle \mapsto \theta(\rho_{\mathbf{qr}})\langle b\rangle$ defineşte un izomorfism între algebrele universale $(\mathfrak{B}/\rho)/\alpha^*_{\mathbf{qr}}$ şi $\mathfrak{B}/\theta(\rho_{\mathbf{qr}})$. Faptul că h este bine definită şi injectivitatea lui h rezultă din **A** iar surjectivitatea este evidentă.

Considerăm $\gamma < o(\tau)$ şi $b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1} \in B$. Cum

$$f_\gamma(\alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b_0\rangle\rangle, \ldots, \alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle\rangle) = \alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b\rangle\rangle$$

pentru orice $\rho\langle b\rangle \in f_\gamma(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle)$ şi cum

$$\rho\langle f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1})\rangle \in f_\gamma(\rho\langle b_0\rangle, \ldots, \rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle)$$

avem $f_\gamma(\alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b_0\rangle\rangle, \ldots, \alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle\rangle) = \alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1})\rangle\rangle$, aşadar,

$$h(f_\gamma(\alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b_0\rangle\rangle, \ldots, \alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle\rangle)) = \theta(\rho_{\mathbf{qr}})\langle f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1})\rangle.$$

Avem, de asemenea,

$$\begin{aligned} f_\gamma(h(\alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b_0\rangle\rangle, \ldots, h(\alpha^*_{\mathbf{qr}}\langle\rho\langle b_{n_\gamma-1}\rangle\rangle))) &= f_\gamma(\theta(\rho_{\mathbf{qr}})\langle b_0\rangle, \ldots, \theta(\rho_{\mathbf{qr}})\langle b_{n_\gamma-1}\rangle) \\ &= \theta(\rho_{\mathbf{qr}})\langle f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1})\rangle \end{aligned}$$

deci h este un omomorfism. □

Exemplul 1.8.10. Fie $(G, \cdot)$ un grup, H un subgrup al său şi $(G/H, \cdot)$ hipergrupul obţinut ca în Exemplul 1.1.3. Fie γ cea mai mică echivalenţă tare regulată pe G/H astfel încât grupul obţinut în urma factorizării să fie un grup comutativ. Dacă G' este subgrupul derivat al lui G atunci cea mai mică congruenţă ce conţine echivalenţa determinată de H şi mulţimea $\{(xy, yx) \mid x, y \in G\}$ este relaţia de echivalenţă determinată de cel mai mic subgrup normal N al lui G ce conţine pe H şi pe G'. Cum $G'H = HG' \subseteq N$ este un subgrup al lui G cu proprietatea că $G' \subseteq G'H$ deducem că $G'H$ este un subgrup normal al lui G, deci $N = G'H$.

Aplicând Teorema 1.8.9 obţinem izomorfismul de grupuri

$$h : (G/H)/\gamma \to G/(G'H),\ h(\gamma\langle xH\rangle) = x(G'H).$$

Folosind acest izomorfism putem stabili o legătură între subhipergrupul derivat al hipergrupului G/H şi subgrupul derivat al lui G.

(Sub)hipergrupul derivat $D(K)$ al unui hipergrup $(K,\cdot)$ este caracterizat în [26, Teorema 3.1] ca fiind $\varphi_K^{-1}(1_{K/\gamma})$ unde $\varphi_K : K \to K/\gamma$ este proiecţia canonică şi $1_{K/\gamma}$ elementul unitate al grupului $(K/\gamma,\cdot)$.

Fie $\pi_H : G \to G/H$ şi $\varphi_{G/H} : G/H \to (G/H)/\gamma$ proiecţiile canonice. Folosind caracterizarea de mai sus a subhipergrupului derivat se poate stabili o conexiune între subhipergrupul derivat al lui G/H şi subgrupul derivat al lui G astfel:

$$D(G/H) = (h \circ \varphi_{G/H})^{-1}(G'H) = \{xH \mid x \in G'H\} = (G'H)/H = \pi_H(G').$$

Dacă $G' \subseteq H$ atunci H este un subgrup normal al lui G, G/H este grup abelian şi atunci $D(G/H) = (G/H)' = H$. Dacă $H \subseteq G'$ atunci $D(G/H) = G'/H$.

Cum, pentru relaţia fundamentală a unei multialgebre, avem $\alpha^* = \alpha^*_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0}$ şi $\rho_{x_0\mathbf{x}_0} = \rho$ putem formula următoarea consecinţă a Teoremei 1.8.9:

Corolarul 1.8.11. $\overline{\mathfrak{B}/\rho} \cong \mathfrak{B}/\theta(\rho)$.

Exemplul 1.8.12. Dacă $(G,\cdot)$ un grup, H este un subgrup al său, $\overline{H}$ este cel mai mic subgrup normal ce conţine pe H şi $(G/H,\cdot)$ este hipergrupul obţinut ca în Exemplul 1.1.3 atunci grupul fundamental $\overline{G/H}$ este izomorf cu grupul cât $G/\overline{H}$.

Din Corolarul 1.8.11 obţinem:

Corolarul 1.8.13. $\overline{\mathfrak{B}/\rho_{\mathbf{qr}}} \cong \mathfrak{B}/\theta(\rho_{\mathbf{qr}})$.

Din Teorema 1.8.9 şi Corolarul 1.8.13 rezultă:

Corolarul 1.8.14. $(\mathfrak{B}/\rho)/\alpha^*_{\mathbf{qr}} \cong \overline{\mathfrak{B}/\rho_{\mathbf{qr}}}$.

Capitolul 2

Construcţii de multialgebre

Construcţiile pe care le abordăm în acest capitol sunt produsul direct, limita directă a unui sistem direct şi limita inversă a unui sistem invers. Studiul se axează pe două direcţii: una se referă la realizarea acestor construcţii (care au un caracter categorial) şi la stabilirea unor proprietăţi de bază ale acestora, iar cea de-a doua direcţie se referă la stabilire de condiţii în care functorul obţinut prin factorizare după relaţia fundamentală comută cu produsele, limitele directe de sisteme directe şi limitele inverse de sisteme inverse.

În paragrafele 2.1 şi 2.2 studiem cele două aspecte menţionate mai sus pentru produsul direct. Rezultatele originale principale din primul paragraf sunt Propoziţiile 2.1.4, 2.1.3 şi 2.1.7 în care am demonstrat că produsul direct al unei familii de multialgebre care verifică o identitate dată verifică, de asemenea, această identitate şi că produsul unei familii de multialgebre complete este o multialgebră completă. Cum algebra fundamentală a unui produs de multialgebre nu este, în general, produsul algebrelor fundamentale ale multialgebrelor cu care lucrăm, am dat condiţii necesare şi suficiente pentru ca aceasta să se întâmple în cazul hipergrupurilor (Teorema 2.2.9) şi în cazul multialgebrelor complete (Teorema 2.2.12). Rezultatele din paragraful 2.1 le-am publicat în [61], iar cele din paragraful 2.2 îşi aşteaptă publicarea în [63].

În paragraful 2.3 ne ocupăm de limita directă a unui sistem direct $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ de multialgebre. Rezultatele originale principale din acest paragraf sunt Propoziţia 2.3.8, Teorema 2.3.10 şi Teorema 2.3.12. În Propoziţia 2.3.8 am arătat că dacă $J \subseteq$ este cofinală în I atunci multialgebrele $\varinjlim_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ şi $\varinjlim_{i\in J}\mathfrak{A}_i$ sunt izomorfe. O altă situaţie în care construcţia limitei directe este mai simplă este cea din Teorema 2.3.10 în care $I = \bigcup_{p\in P} I_p$, cu $(I_p, \leq)$ şi $(P, \leq)$ mulţimi ordonate dirijate superior care au proprietatea că dacă $p \leq q$ în P atunci $I_p \subseteq I_q$. Propoziţia 2.3.8 şi Teorema 2.3.10 ne-au condus la Teorema 2.3.12, în care am demonstrat că o clasă algebrică de multialgebre închisă la formarea de limite directe de sisteme directe bine ordonate este închisă la formarea de limite directe de sisteme directe arbitrare. Am stabilit, de asemenea, că functorul determinat de factorizarea după relaţia fundamentală are un adjunct la dreapta (Teorema 2.4.1), deci comută cu limitele directe.

În ultimele două paragrafe ale acestei teze studiem limitele inverse de sisteme inverse. Începem prin a privi multialgebrele de tip τ ca sisteme relaţionale de tip τ' şi construim limita inversă a unui sistem invers de multialgebre de tip τ în categoria sistemelor relaţionale de tip τ'. Bazându-ne pe proprietatea anumitor sisteme inverse de mulţimi nevide de a avea limita inversă vidă, am demonstrat că sistemul relaţional astfel obţinut nu este întotdeauna o multialgebră. Având în vedere acest fapt, proprietăţile noastre furnizează, în cazurile abordate, şi condiţii pentru ca limita inversă a unui sistem invers de multialgebre să fie o multialgebră. Propoziţia 2.5.14 şi Teoremele 2.5.16 şi 2.5.17 sunt într-un anume fel duale Propoziţiei 2.3.8 şi Teoremelor 2.3.10 şi 2.3.12, respectiv. Folosind Propoziţia 2.5.14 şi Teoremele 2.5.16 şi 2.5.17, demonstrăm Propoziţiile 2.6.3, 2.6.4 şi Teorema 2.6.5 în care dăm condiţii pentru ca algebra fundamentală a limitei inverse a unui sistem invers de multialgebre să fie limita inversă a algebrelor fundamentale corespunzătoare. Rezultatele din paragrafele 2.3, 2.4, 2.5 şi 2.6 fac subiectul preprinturilor [64] şi [65].

2.1 Produsul direct al unei familii de multialgebre

Fiind dată o familie $(\mathfrak{A}_i = (A_i, (r_\gamma)_{\gamma<o(\tau)}) \mid i \in I)$ de sisteme relaţionale de tip $\tau = (n_\gamma + 1)_{\gamma<o(\tau)}$, *produsul direct al familiei de sisteme relaţionale* $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ este sistemul relaţional de tip τ obţinut prin definirea pe componente a relaţiilor pe produsul cartezian $\prod_{i\in I} A_i$, adică pentru orice $(a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma})_{i\in I}) \in r_\gamma \Leftrightarrow (a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma}) \in r_\gamma,\ \forall i \in I.$$

Considerând o familie $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ de multialgebre de tip τ şi sistemele relaţionale definite de (1.1.3), sistemul relaţional care rezultă pe produsul cartezian $\prod_{i\in I} A_i$ este o multialgebră de tip τ cu multioperaţiile definite prin:

$$f_\gamma((a_i^0)_{i\in I},\dots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I})=\prod_{i\in I} f_\gamma(a_i^0,\dots,a_i^{n_\gamma-1}), \tag{2.1.1}$$

pentru orice $\gamma < o(\tau)$. Această multialgebră se numeşte *produsul direct al multialgebrelor* $(\mathfrak{A}_i \mid i\in I)$. Observăm că proiecţiile canonice ale produsului,

$$e_j^I : \prod_{i\in I} A_i \to A_j,\ e_j^I((a_i)_{i\in I}) = a_j\ (j\in I)$$

sunt omomorfisme (ideale) de multialgebre.

Propoziţia 2.1.1. *Multialgebra $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ construită mai sus, împreună cu proiecţiile canonice e_i^I, $i\in I$, este produsul multialgebrelor $(\mathfrak{A}_i \mid i\in I)$ în categoria* $\mathbf{Malg}(\tau)$.

Demonstraţie. Oricare ar fi multialgebra $\mathfrak{B}$ şi oricare ar fi familia de omomorfisme de multialgebre $(\alpha_i : B\to A_i \mid i\in I)$ există un singur omomorfism $\alpha : B\to\prod_{i\in I}A_i$ astfel încât $\alpha_i = e_i^I\circ\alpha$ pentru orice $i\in I$.

Într-adevăr, există o singură funcţie α cu proprietatea că diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "e_i^I"] & A_i \\ B \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

este comutativă. Această funcţie este definită prin $\alpha(b)=(\alpha_i(b))_{i\in I}$. Rămâne de verificat că α este un omomorfism de multialgebre. Considerăm $\gamma<o(\tau)$ şi $b_0,\dots,b_{n_\gamma-1}\in B$ şi avem

$$\begin{aligned}\alpha(f_\gamma(b_0,\dots,b_{n_\gamma-1})) &= \{\alpha(b)\mid b\in f_\gamma(b_0,\dots,b_{n_\gamma-1})\}\\ &= \{(\alpha_i(b))_{i\in I}\mid b\in f_\gamma(b_0,\dots,b_{n_\gamma-1})\}.\end{aligned}$$

Din $b\in f_\gamma(b_0,\dots,b_{n_\gamma-1})$ rezultă

$$\alpha_i(b)\in\alpha_i(f_\gamma(b_0,\dots,b_{n_\gamma-1}))\subseteq f_\gamma(\alpha_i(b_0),\dots,\alpha_i(b_{n_\gamma-1}))$$

pentru orice $i\in I$, de unde deducem

$$\begin{aligned}\alpha(f_\gamma(b_0,\dots,b_{n_\gamma-1})) &\subseteq \prod_{i\in I} f_\gamma(\alpha_i(b_0),\dots,\alpha_i(b_{n_\gamma-1}))\\ &= f_\gamma((\alpha_i(b_0))_{i\in I},\dots,(\alpha_i(b_{n_\gamma-1}))_{i\in I})\\ &= f_\gamma(\alpha(b_0),\dots,\alpha(b_{n_\gamma-1})),\end{aligned}$$

şi demonstraţia este încheiată. $\square$

Lema 2.1.2. *Oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ *şi* $(a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, *avem*

$$p((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I}) = \prod_{i\in I} p(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}). \tag{2.1.2}$$

Demonstraţie. Vom face o inducţie după paşii de construcţie a unui simbol polinomial.
Pasul 1. Dacă $\mathbf{p} = \mathbf{x}_j$ $(j \in \{0, \ldots, n-1\})$ atunci

$$\begin{aligned} p((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I}) &= e_j^n((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I}) = (a_i^j)_{i\in I} \\ =&(e_j^n(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}))_{i\in I} = \prod_{i\in I} e_j^n(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) = \prod_{i\in I} p(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}). \end{aligned}$$

Pasul 2. Considerăm că proprietatea a fost demonstrată pentru simbolurile polinomiale $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma - 1} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi că $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1})$. Atunci avem

$$\begin{aligned} p((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I}) &= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I}) \\ &= f_\gamma(p_0((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I}), \ldots, p_{n_\gamma-1}((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I})) \\ &= f_\gamma(\prod_{i\in I} p_0(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}), \ldots, \prod_{i\in I} p_{n_\gamma-1}(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1})). \end{aligned}$$

Dar

$$(x_i)_{i\in I} \in f_\gamma(\prod_{i\in I} p_0(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}), \ldots, \prod_{i\in I} p_{n_\gamma-1}(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}))$$

dacă şi numai dacă pentru orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ şi $i \in I$, există $b_i^j \in p_j(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1})$ astfel ca

$$(x_i)_{i\in I} \in f_\gamma((b_i^0)_{i\in I}, \ldots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}) = \prod_{i\in I} f_\gamma(b_i^0, \ldots, b_i^{n_\gamma-1}),$$

astfel

$$\begin{aligned} p((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i\in I}) &= \prod_{i\in I} f_\gamma(p_0(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1})) \\ &= \prod_{i\in I} f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) \\ &= \prod_{i\in I} p(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei. $\square$

Propoziţia 2.1.3. *Fie* $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ *o familie de multialgebre şi fie* $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. *Dacă identitatea slabă* $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ *este satisfăcută pe fiecare multialgebră* $\mathfrak{A}_i$ *atunci identitatea slabă* $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ *este satisfăcută pe multialgebra* $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.

Demonstraţie. Dacă identitatea $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este verificată pe fiecare multialgebră $\mathfrak{A}_i$ atunci pentru orice $(a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ avem

$$q(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) \cap r(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) \neq \emptyset.$$

Din Lema 2.1.2, rezultă că

$$\begin{aligned} & q((a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i \in I}) \cap r((a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i \in I}) \\ & \quad = \left(\prod_{i \in I} q(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) \right) \cap \left(\prod_{i \in I} r(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) \right) \\ & \quad = \prod_{i \in I} (q(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) \cap r(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1})) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Deci identitatea slabă $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este verificată pe multialgebra produs direct. $\square$

Propoziţia 2.1.4. *Fie* $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ *o familie de multialgebre şi fie* $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. *Dacă identitatea* $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ *este satisfăcută pe fiecare multialgebră* $\mathfrak{A}_i$ *atunci identitatea* $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ *este satisfăcută pe multialgebra* $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.

Demonstraţie. Pentru orice $i \in I$ şi orice $a_i^0, \ldots, a_i^{n-1} \in A_i$ avem

$$q(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) = r(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}).$$

Folosind Lema 2.1.2, rezultă că

$$\begin{aligned} q((a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i \in I}) &= \prod_{i \in I} q(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) = \prod_{i \in I} r(a_i^0, \ldots, a_i^{n-1}) \\ &= r((a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n-1})_{i \in I}), \end{aligned}$$

adică identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este verificată pe multialgebra produs direct. $\square$

Propoziţia 2.1.5. *Produsul direct al unei familii de hipergrupuri este un hipergrup.*

Demonstraţie. Fie $((H_i, \circ_i) \mid i \in I)$ o familie de hipergrupuri. Egalităţile (1.1.2) definesc pentru fiecare $i \in I$ o multialgebră $(H_i, \circ_i, /_i, \backslash_i)$ de tip $\tau = (2, 2, 2)$ care verifică identităţile (1.5.1), (1.5.2) (şi (1.5.3)). Cu ajutorul egalităţii (2.1.1) se obţine o multialgebră $(\prod_{i\in I} H_i, \circ, /, \backslash)$ cu trei multioperaţii binare. Conform Propoziţiilor 2.1.4 şi 2.1.3 rezultă că pe această multialgebră sunt satisfăcute identităţile (1.5.1), (1.5.2) (şi (1.5.3)), ceea ce arată că $(\prod_{i\in I} H_i, \circ)$ este un hipergrup (vezi Observaţia 1.5.3). $\square$

Mai mult, multioperaţiile / şi \ din multialgebra $(\prod_{i\in I} H_i, \circ, /, \backslash)$ de mai sus sunt legate de $\circ$ prin (1.1.2). Într-adevăr, $(x_i)_{i\in I} \in (a_i)_{i\in I}/(b_i)_{i\in I} = \prod_{i\in I}(a_i/_i b_i)$ dacă şi numai dacă $x_i \in a_i/_i b_i$ pentru orice $i \in I$ sau, altfel spus, pentru orice $i \in I$, $a_i \in x_i \circ_i b_i$. Dar acest fapt este echivalent cu $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(x_i \circ_i b_i) = (x_i)_{i\in I} \circ (b_i)_{i\in I}$. Deducem că

$$(a_i)_{i\in I}/(b_i)_{i\in I} = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H_i \mid (a_i)_{i\in I} \in (x_i)_{i\in I} \circ (b_i)_{i\in I}\}.$$

Analog se arată că are loc egalitatea

$$(b_i)_{i\in I}\backslash(a_i)_{i\in I} = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H_i \mid (a_i)_{i\in I} \in (b_i)_{i\in I} \circ (x_i)_{i\in I}\}.$$

Ţinând cont de Observaţia 1.5.4 am stabilit:

Corolarul 2.1.6. *Categoria* **HG** *a hipergrupurilor este izomorfă cu o subcategorie închisă la produse a categoriei* **Malg**$((2, 2, 2))$.

Propoziţia 2.1.7. *Produsul direct de multialgebre complete este o multialgebră completă.*

Demonstraţie. Să considerăm $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(m)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, m-1\}\}$ şi $(a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{m-1})_{i\in I}, (b_i^0)_{i\in I}, \ldots, (b_i^{m-1})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ astfel încât

$$q((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{m-1})_{i\in I}) \cap r((b_i^0)_{i\in I}, \ldots, (b_i^{m-1})_{i\in I}) \neq \emptyset.$$

Aceasta înseamnă, în conformitate cu Lema 2.1.2, că pentru orice $i \in I$ avem

$$q(a_i^0, \ldots, a_i^{m-1}) \cap r(b_i^0, \ldots, b_i^{m-1}) \neq \emptyset.$$

Dar toate multialgebrele $\mathfrak{A}_i$ fiind complete, avem

$$q(a_i^0, \ldots, a_i^{m-1}) = r(b_i^0, \ldots, b_i^{m-1})$$

oricare ar fi $i \in I$, deci

$$q((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{m-1})_{i\in I}) = r((b_i^0)_{i\in I}, \ldots, (b_i^{m-1})_{i\in I}),$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Corolarul 2.1.8. *Categoria* $\mathbf{CMalg}(\tau)$ *a multialgebrelor complete de tip* τ *este o subcategorie închisă la produse a categoriei* $\mathbf{Malg}(\tau)$.

2.2 Algebra fundamentală a produsului direct de multialgebre

Fie $(\overline{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I)$ familia algebrelor fundamentale corespunzătoare unei familii de multialgebre $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$. Să considerăm algebra universală $\prod_{i\in I}\overline{\mathfrak{A}_i}$ şi proiecţiile sale canonice $\pi_j : \prod_{i\in I}\overline{A_i} \to \overline{A_j}$ $(j \in I)$. Există un singur omomorfism φ de algebre universale astfel încât diagrama următoare să fie comutativă:

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I}\overline{\mathfrak{A}_i} \arrow[r, "\pi_j"] & \overline{\mathfrak{A}_j} \\ \overline{\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\overline{e_j^I}"'] & \end{tikzcd}.$$

Acest omomorfism este dat de egalitatea

$$\varphi(\overline{(a_i)_{i\in I}}) = (\overline{a_i})_{i\in I}$$

oricare ar fi $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. Este clar că omomorfismul φ este surjectiv, ceea ce înseamnă că algebra universală $\overline{\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i}$, cu omomorfismele $(\overline{e_i^I} \mid i \in I)$ este produsul algebrelor $(\overline{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I)$ în categoria $\mathbf{Alg}(\tau)$ dacă şi numai dacă omomorfismul φ este şi injectiv.

Dar aceasta nu are loc întotdeauna, după cum rezultă din exemplul următor:

Exemplul 2.2.1. Considerăm hipergrupoizii $(H_1, \circ)$ şi $(H_2, \circ)$ definiţi pe mulţimile $H_1 = \{a, b, c\}$ şi $H_2 = \{x, y, z\}$ cu trei elemente de hiperprodusele date de următoarele tabele:

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

$\circ$	x	y	z
x	x	$y,\ z$	$y,\ z$
y	$y,\ z$	$y,\ z$	$y,\ z$
z	$y,\ z$	$y,\ z$	$y,\ z$

Este uşor de observat că dacă $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}((2))$ are proprietatea că există $a_0, \ldots, a_{n-1} \in H_1$ pentru care $b \in (\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(H_1,\circ)}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ (sau $c \in (\mathbf{p})_{\mathfrak{P}^*(H_1,\circ)}(a_0, \ldots, a_{n-1})$) atunci există $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ astfel încât $\mathbf{p} = \mathbf{x}_i$ şi $a_i = b$ (respectiv $a_i = c$). În $\overline{H_1} \times \overline{H_2}$ avem $(\overline{b}, \overline{y}) = (\overline{b}, \overline{z})$. Dacă omomorfismul $\varphi : \overline{H_1 \times H_2} \to \overline{H_1} \times \overline{H_2}$ definit ca mai sus ar fi injectiv atunci, în $\overline{H_1 \times H_2}$, am avea $\overline{(b, y)} = \overline{(b, z)}$. Aceasta ar conduce la $y = z$, ceea ce e fals. Mai mult chiar, întrucât acelaşi lucru se întâmplă înlocuind b cu c, rezultă că $\overline{H_1 \times H_2}$ are 8 elemente, în timp ce $\overline{H_1} \times \overline{H_2}$ are doar 6 elemente.

Vom folosi pe parcursul acestui paragraf notaţiile de mai sus. Astfel, ne propunem în continuare să găsim condiţii necesare şi suficiente pentru ca omomorfismul φ să fie injectiv. Am găsit astfel de condiţii, exprimate cu ajutorul polinoamelor, pentru cazul în care I este finită sau $\alpha_{\mathfrak{A}_i} = \alpha^*_{\mathfrak{A}_i}$ pentru orice $i \in I$ (chiar dacă I nu e finită).

Propoziţia 2.2.2. *Fie* $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ *o familie de multialgebre de tip* τ. *Presupunem că* I *este finită sau că* $\alpha_{\mathfrak{A}_i}$ *este tranzitivă pentru orice* $i \in I$. *Omomorfismul* φ *este injectiv dacă şi numai dacă pentru orice* $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$, $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$ *şi orice*

$$(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1})$$

există $m \in \mathbb{N}^*$, $k_j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}^j \in \mathbf{P}^{(k_j)}(\tau)$ *şi* $(b_i^{0,j})_{i\in I}, \ldots, (b_i^{k_j-1,j})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ *astfel încât*

$$(x_i)_{i\in I} \in q^0((b_i^{0,0})_{i\in I}, \ldots, (b_i^{k_0-1,0})_{i\in I}),\ (y_i)_{i\in I} \in q^{m-1}((b_i^{0,m-1})_{i\in I}, \ldots, (b_i^{k_{m-1}-1,m-1})_{i\in I})$$

şi

$$q^{j-1}((b_i^{0,j-1})_{i\in I}, \ldots, (b_i^{k_{j-1}-1,j-1})_{i\in I}) \cap q^j((b_i^{0,j})_{i\in I}, \ldots, (b_i^{k_j-1,j})_{i\in I}) \neq \emptyset, \tag{2.2.1}$$

pentru toţi $j \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Demonstraţie. Să considerăm că φ este injectivă. Este clar că dacă luăm $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$, $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$ astfel ca

$$(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1})$$

atunci avem $(\overline{x_i})_{i\in I} = (\overline{y_i})_{i\in I}$, aşadar $\overline{(x_i)_{i\in I}} = \overline{(y_i)_{i\in I}}$ şi din definiţia relaţiei fundamentale pe multialgebra $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ obţinem condiţia vizată. Să remarcăm că această implicaţie nu foloseşte faptul că I este finită sau că relaţiile $\alpha_{\mathfrak{A}_i}$ sunt tranzitive.

Reciproc, să considerăm că relaţiile $\alpha_{\mathfrak{A}_i}$, $i \in I$, sunt tranzitive. Atunci

$$(\overline{x_i})_{i\in I} = (\overline{y_i})_{i\in I}$$

dacă şi numai dacă pentru orice $i \in I$ există $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$, $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ astfel încât $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1})$, iar condiţia din enunţ ne conduce la egalitatea

$$\overline{(x_i)_{i\in I}} = \overline{(y_i)_{i\in I}}.$$

Să considerăm acum că mulţimea I este finită. Cazul $I = \emptyset$ este trivial. Să presupunem că $I \neq \emptyset$. Din faptul că

$$(\overline{x_i})_{i\in I} = (\overline{y_i})_{i\in I}$$

obţinem, în fiecare $\mathfrak{A}_i$ un şir de l_i polinoame (pe $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{A}_i)$) cu proprietatea că x_i este în primul polinom, y_i este în ultimul şi orice doi membri consecutivi ai acestui şir au intersecţia nevidă (menţionăm că aici, când vorbim de polinoame înţelegem imagini de polinoame aplicate la mulţimi cu un element). Considerăm $l = \max\{l_i \mid i \in I\}$ şi repetăm în şirul de polinoame obţinut pentru fiecare $i \in I$ ultimul polinom de câte ori este necesar pentru a avea l membri. Dacă luăm în considerare produsul cartezian al primilor membri ai acestor şiruri, apoi ai membrilor secunzi şi aşa mai departe, obţinem l astfel de produse carteziene $P_1, \ldots, P_l$ cu proprietatea că orice două astfel de produse consecutive au intersecţia nevidă. Rezultă un şir $(z_i^0)_{i\in I}, (z_i^1)_{i\in I}, \ldots, (z_i^l)_{i\in I}$ de elemente din $\prod_{i\in I} A_i$ astfel ca $(x_i)_{i\in I} = (z_i^0)_{i\in I}$, $(z_i^l)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$ şi $(z_i^j)_{i\in I} \in P_j \cap P_{j+1}$ pentru orice $j \in \{1, \ldots, l-1\}$. Aplicăm condiţia din enunţ pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, l-1\}$, fiecare P_j şi fiecare $(z_i^{j-1})_{i\in I}, (z_i^j)_{i\in I} \in P_j$ şi obţinem un şir de polinoame pe algebra părţilor nevide ale multialgebrei $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ astfel încât $(x_i)_{i\in I}$ este în primul membru, $(y_i)_{i\in I}$ în ultimul şi oricare doi membri consecutivi ai şirului de polinoame au intersecţia nevidă. Astfel,

$$\overline{(x_i)_{i\in I}} = \overline{(y_i)_{i\in I}}$$

şi deducem că omomorfismul φ este injectiv. □

Pare destul de incomod să lucrăm cu condiţia stabilită în propoziţia de mai sus, dar aceasta ne permite să deducem o condiţie suficientă care se va dovedi folositoare în cele ce vor urma.

Corolarul 2.2.3. *Fie* $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ *o familie de multialgebre de tip* τ. *Presupunem că mulţimea* I *este finită sau că* $\alpha_{\mathfrak{A}_i}$ *este tranzitivă pentru orice* $i \in I$. *Dacă pentru orice* $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$, $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$ *există* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ *şi* $b_i^0, \ldots, b_i^{n-1} \in A_i$ $(i \in I)$ *cu proprietatea că*

$$\prod_{i \in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1}) \subseteq q((b_i^0)_{i\in I}, \ldots, (b_i^{n-1})_{i \in I}) \tag{2.2.2}$$

atunci omomorfismul φ *este injectiv.*

Observaţia 2.2.4. Să notăm că în Propoziţia 2.2.2, deci şi în Corolarul 2.2.3 putem considera q_i ca fiind doar acele polinoame care intervin explicit în caracterizarea relaţiilor $\alpha_{\mathfrak{A}_i}$. Astfel, dacă multialgebrele $\mathfrak{A}_i$ ar fi hipergrupuri ar fi suficient să lucrăm doar cu acele polinoame q_i care aplicate la submulţimi cu un element ale mulţimilor A_i dau hiperproduse cu unul sau mai mulţi factori.

Fie $\mathcal{C}$ o subcategorie a categoriei $\mathbf{Malg}(\tau)$, fie $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Malg}(\tau)$ functorul de incluziune şi fie F functorul introdus de Observaţia 1.6.21. Întrucât acţiunea functorului $F \circ U$ asupra obiectelor şi morfismelor din $\mathcal{C}$ este dată de F ne vom referi la functorul $F \circ U$ ca fiind F.

Sunt imediate următoarele propoziţii:

Propoziţia 2.2.5. *Fie* $\mathcal{C}$ *o subcategorie închisă la produse finite a categoriei* $\mathbf{Malg}(\tau)$. *Dacă pentru orice mulţime finită* I, *orice familie* $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ *de multialgebre din* $\mathcal{C}$ *şi orice* $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$, $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$ *există* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ *şi* $b_i^0, \ldots, b_i^{n-1} \in A_i$ $(i \in I)$ *astfel încât incluziunea* (2.2.2) *are loc atunci functorul* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\tau)$ *comută cu produsele finite.*

Propoziţia 2.2.6. *Fie* $\mathcal{C}$ *o subcategorie închisă la produse a categoriei* $\mathbf{Malg}(\tau)$ *cu proprietatea că* $\alpha_{\mathfrak{A}}$ *este tranzitivă pentru orice multialgebră* $\mathfrak{A}$ *din* $\mathcal{C}$. *Dacă pentru orice mulţime* I, *orice familie* $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ *de multialgebre din* $\mathcal{C}$ *şi orice* $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$, $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$ *există* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ *şi* $b_i^0, \ldots, b_i^{n-1} \in A_i$ $(i \in I)$ *astfel încât incluziunea* (2.2.2) *are loc atunci functorul* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\tau)$ *comută cu produsele.*

În următoarea parte a acestui paragraf vom studia două clase particulare de multialgebre pentru care relaţia α definită în paragraful 1.6 este tranzitivă: clasa hipergrupurilor şi clasa multialgebrelor complete. Vom deduce că în Propoziţia 2.2.5 putem lua $\mathcal{C}$, subcategoria categoriei multialgebrelor de tip $\tau = (2, 2, 2)$ despre care am arătat în paragraful anterior că este izomorfă cu **HG** şi că în **HG** putem obţine subcategorii $\mathcal{C}$ ca cele din Propoziţia 2.2.6 dacă pentru un număr natural fixat $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm ca obiecte hipergrupurile pentru care $\beta = \beta_n$ (pentru notaţii a se revedea Exemplul 1.6.16). Hipergrupurile complete sunt un exemplu în acest sens deoarece pentru ele avem $\beta = \beta_2$. Vom găsi, de asemenea, condiţii ce trebuie satisfăcute într-o clasă de multialgebre complete pentru ca functorul determinat de relaţia fundamentală să comute cu produsele.

Cazul hipergrupurilor

Mai întâi, să vedem ce se întâmplă cu produsele finite de hipergrupuri. Reamintim că relaţia fundamentală a unui hipergrup $(H, \circ, /, \backslash)$ este relaţia $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \beta_n$ unde pentru orice $x, y \in H$, $x \beta_n y$ dacă şi numai dacă există $a_0, \ldots, a_{n-1} \in H$, cu $x, y \in a_0 \circ \cdots \circ a_{n-1}$. Folosim Observaţia 2.2.4 şi ne îndreptăm atenţia asupra produsului cartezian a două hiperproduse.

Într-un hipergrup, orice hiperprodus cu n factori este o submulţime a unui hiperprodus cu $n + 1$ factori. Aceasta se obţine din (1.1.1). Într-adevăr, să considerăm un hipergrup $(H, \circ)$ şi elementele $a_1, \ldots, a_n \in H$. Cum $H = H \circ a_1$, rezultă că există $a_0 \in H$ astfel încât $a_1 \in a_0 \circ a_1$, de unde avem $a_1 \circ \cdots \circ a_n \subseteq a_0 \circ a_1 \circ \cdots \circ a_n$. Deducem că $\beta_n \subseteq \beta_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi că pentru orice hipergrupuri $(H_0, \circ)$, $(H_1, \circ)$ putem aplica Corolarul 2.2.3. Aşadar, $\overline{H_0 \times H_1}$, împreună cu omomorfismele $\overline{e_0^2}$, $\overline{e_1^2}$, este produsul grupurilor $\overline{H_0}$ şi $\overline{H_1}$. Am stabilit, în felul acesta, următorul rezultat:

Propoziţia 2.2.7. *Functorul* $F : \mathbf{HG} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ (*introdus în Observaţia 1.7.5*) *comută cu produsele finite.*

Totuşi, functorul F nu comută cu produsele arbitrare de hipergrupuri, după cum reiese din următorul exemplu:

Exemplul 2.2.8. Considerăm pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi hipergrupoidul $(\mathbb{Z}, \circ)$, unde

$$x \circ y = \{x + y, x + y + 1\}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Rezultă imediat că $(\mathbb{Z}, \circ)$ este un hipergrup cu relaţia fundamentală $\beta = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Înseamnă că grupul fundamental al lui $(\mathbb{Z}, \circ)$ este grupul cu un element. Remarcăm că pentru ca un hiperprodus să conţină două elemente $a, b \in \mathbb{Z}$ este necesar ca acesta să aibă cel puţin $|a-b|+1$ factori. Fie produsul $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \circ)$. Grupul fundamental al acestui hipergrup are cel puţin două elemente. Într-adevăr, şirurile de numere întregi

$$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(n) = 0,\ g(n) = n\ (n \in \mathbb{N})$$

nu sunt în aceeaşi clasă de echivalenţă a relaţiei fundamentale a hipergrupului $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \circ)$. Altfel, ar exista un hiperprodus de şiruri din $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ care să conţină atât pe f cât şi pe g. Să presupunem că acest hiperprodus ar avea m factori $(a_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$. Din

$$f, g \in (a_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \circ \cdots \circ (a_n^m)_{n\in\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} (a_n^1 \circ \cdots \circ a_n^m)$$

deducem că numerele întregi $f(m) = 0$ şi $g(m) = m$ sunt într-un acelaşi hiperprodus cu m factori, $a_m^1 \circ \cdots \circ a_m^m$, ceea ce e imposibil.

Pentru produsele arbitrare de hipergrupuri avem:

Teorema 2.2.9. *Fie hipergrupurile H_i, $i \in I$, cu relaţiile fundamentale β^{H_i}. Grupul $\overline{\prod_{i\in I} H_i}$, împreună cu omomorfismele $(\overline{e_i^I} \mid i \in I)$, este produsul familiei de grupuri $(\overline{H_i} \mid i \in I)$ dacă şi numai dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\beta^{H_i} \subseteq \beta_n^{H_i}$, pentru toţi i din I exceptând un număr finit.*

Demonstraţie. Notăm $I_n = \{i \in I \mid \beta^{H_i} \nsubseteq \beta_n^{H_i}\}$. E clar că $I_{n+1} \subseteq I_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru un hipergrup H, faptul că $\beta^H \nsubseteq \beta_n^H$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$ înseamnă că există două elemente în H care aparţin aceluiaşi hiperprodus cu mai mult de n factori, dar nu există nici un hiperprodus cu n factori care să le conţină pe amândouă.

Să considerăm că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât I_n este finită şi să luăm o familie arbitrară de hiperproduse din hipergrupurile H_i $(i \in I)$. Fiecare hiperprodus de elemente din H_i, cu $i \in I \setminus I_n$, este inclus într-un hiperprodus cu n factori. Fie k cel mai mare număr de factori din hiperprodusele familiei date corespunzătoare la elemente $i \in I_n$. Evident, orice hiperprodus din familia dată este inclus într-un hiperprodus cu $\max\{k, n\}$ factori, ceea ce înseamnă că are loc (2.2.2).

Reciproc, să considerăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ mulţimea I_n este infinită. Construim două familii $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ din $\prod_{i\in I} H_i$ astfel încât $a_i \beta^{H_i} b_i$, pentru orice $i \in I$, dar $((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \notin \beta^{\prod_{i\in I} H_i}$. Construcţia se face astfel: alegem $i_1 \in I_1$, şi considerăm $a_{i_1}, b_{i_1} \in H_{i_1}$ astfel încât $a_{i_1} \neq b_{i_1}$ aparţin unui hiperprodus cu mai mult de doi factori din H_{i_1}; acum, luăm $i_2 \in I_2 \setminus \{i_1\}$ şi considerăm $a_{i_2}, b_{i_2} \in H_{i_2}$ astfel ca a_{i_2}, b_{i_2} să fie într-un hiperprodus cu mai mult de trei factori din H_{i_2} dar nu aparţin nici unui hiperprodus cu doi factori din H_{i_2}; presupunem că am obţinut toate elementele a_{i_k}, b_{i_k} cu $k \in \mathbb{N}^*,\ k \leq n$, şi considerăm elementele $a_{i_{n+1}}, b_{i_{n+1}} \in H_{i_{n+1}},\ i_{n+1} \in I_n \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$ astfel încât $a_{i_{n+1}}, b_{i_{n+1}}$ sunt într-un hiperprodus cu mai mult de $n+1$ factori din $H_{i_{n+1}}$, dar nu sunt în nici un hiperprodus cu n factori din $H_{i_{n+1}}$; pentru orice $i \in I \setminus \{i_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ considerăm $a_i = b_i$. $\square$

Corolarul 2.2.10. *Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă $\mathcal{C}_n$ este clasa hipergrupurilor pentru care $\beta = \beta_n$ atunci $\mathcal{C}_n$ este închisă la formarea de produse directe şi functorul $F : \mathcal{C}_n \longrightarrow$ **Grp** determinat de factorizarea în raport cu relaţia fundamentală comută cu produsele.*

Cum pentru hipergrupurile complete avem $\beta = \beta_2$, deducem:

Corolarul 2.2.11. *Functorul F comută cu produsele de hipergrupuri complete.*

Cazul multialgebrelor complete

Am văzut că pentru o multialgebră completă $\mathfrak{A}$ de tip τ clasele din mulţimea $\overline{A}$ au forma $\{a\}$ sau $f_\gamma(a_0, \ldots, a_{n_\gamma - 1})$, cu $\gamma < o(\tau),\ a, a_0, \ldots, a_{n_\gamma-1} \in A$ (situaţii care nu se exclud reciproc). Vom folosi aceasta pentru a demonstra:

Teorema 2.2.12. *Fie $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ o familie de multialgebre complete de acelaşi tip τ. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\overline{\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i}$ *(împreună cu omomorfismele $(\overline{e_i^I} \mid i \in I)$ este produsul familiei de algebre universale $(\overline{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I)$;*

ii) pentru orice $n_i \in \mathbb{N}$, orice $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$ şi orice $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$, $(i \in I)$ există $n \in \mathbb{N},\ \mathbf{q} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi $b_i^0, \ldots, b_i^{n-1} \in A_i$ $(i \in I)$ asfel încât (2.2.2) *are loc;*

iii) pentru orice $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$ şi $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$ avem

$$\left|\prod_{i\in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1})\right| = 1$$

sau există $\gamma < o(\tau)$, $b_i^0, \ldots, b_i^{n_\gamma-1} \in A_i$ $(i \in I)$ astfel încât

$$\prod_{i\in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1}) \subseteq f_\gamma((b_i^0)_{i\in I}, \ldots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}). \tag{2.2.3}$$

Demonstraţie. Implicaţiile $ii) \Rightarrow i)$ şi $iii) \Rightarrow ii)$ sunt imediate.

$i) \Rightarrow iii)$ Să luăm $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$ şi $a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$ pentru care

$$\left| \prod_{i \in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1}) \right| \neq 1$$

şi să considerăm o familie $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1})$. În aceste condiţii, există o altă familie $(y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1})$ astfel încât $(x_i)_{i \in I} \neq (y_i)_{i \in I}$. Este clar că are loc egalitatea $(\overline{x_i})_{i \in I} = (\overline{y_i})_{i \in I}$ şi din $i)$ deducem că $\overline{(x_i)_{i \in I}} = \overline{(y_i)_{i \in I}}$. Rezultă că există $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ şi $(c_i^0)_{i \in I}, \ldots, (c_i^{n-1})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ astfel încât

$$(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in q((c_i^0)_{i \in I}, \ldots, (c_i^{n-1})_{i \in I}).$$

Cum $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ este tot o multialgebră completă, conform Observaţiei 1.7.15, există ordinalul $\gamma < o(\tau)$ şi familiile $(b_i^0)_{i \in I}, \ldots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ cu proprietatea că

$$q((c_i^0)_{i \in I}, \ldots, (c_i^{n-1})_{i \in I}) = f_\gamma((b_i^0)_{i \in I}, \ldots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i \in I}).$$

Aşadar, $(x_i)_{i \in I} \in f_\gamma((b_i^0)_{i \in I}, \ldots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i \in I})$, ceea ce ne conduce la

$$\prod_{i \in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1}) \cap f_\gamma((b_i^0)_{i \in I}, \ldots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i \in I}) \neq \emptyset.$$

Dar $f_\gamma((b_i^0)_{i \in I}, \ldots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i \in I}) = \prod_{i \in I} f_\gamma(b_i^0, \ldots, b_i^{n_\gamma-1})$ şi astfel, pentru orice $i \in I$,

$$q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1}) \cap f_\gamma(b_i^0, \ldots, b_i^{n_\gamma-1}) \neq \emptyset.$$

Dacă există $j \in \{0, \ldots, n_i - 1\}$ astfel încât $\mathbf{q}_i = \mathbf{x}_j$ atunci

$$q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1}) = \{a_j\} \subseteq f_\gamma(b_i^0, \ldots, b_i^{n_\gamma-1}).$$

Dacă $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_j \mid j \in \{0, \ldots, n_i - 1\}\}$ atunci, folosind completitudinea multialgebrei $\mathfrak{A}_i$ avem

$$q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1}) = f_\gamma(b_i^0, \ldots, b_i^{n_\gamma-1}).$$

Aşadar, $\prod_{i \in I} q_i(a_i^0, \ldots, a_i^{n_i-1}) \subseteq \prod_{i \in I} f_\gamma(b_i^0, \ldots, b_i^{n_\gamma-1})$ şi incluziunea (2.2.3) are loc. $\square$

Observaţia 2.2.13. Fie $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ o familie de multialgebre complete de acelaşi tip care verifică una din condiţiile echivalente din teorema anterioară. Dacă $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in$

$\mathbf{P}^{(n_i)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_j \mid j \in \{0, \dots, n_i - 1\}\}$ şi $a_i^0, \dots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$ atunci există $\gamma < o(\tau)$ şi $b_i^0, \dots, b_i^{n_\gamma-1} \in A_i$ $(i \in I)$ astfel încât

$$\prod_{i \in I} q_i(a_i^0, \dots, a_i^{n_i-1}) = f_\gamma((b_i^0)_{i\in I}, \dots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}).$$

Din Observaţia 1.7.15 se deduce imediat:

Observaţia 2.2.14. Pentru o familie de multialgebre complete $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ următoarele condiţii sunt echivalente:

a) există $n \in \mathbb{N}$ şi $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_i \mid i \in \{0, .., n-1\}\}$ cu proprietatea că pentru orice $i \in I$ şi orice $a_i \in A_i$ există $a_i^0, \dots, a_i^{n-1} \in A_i$ astfel încât $a_i \in p(a_i^0, \dots, a_i^{n-1})$;

b) există $\gamma < o(\tau)$ astfel încât pentru orice $i \in I$ şi orice $a_i \in A_i$ există $a_i^0, \dots, a_i^{n_\gamma-1} \in A_i$ astfel încât $a_i \in f_\gamma(a_i^0, \dots, a_i^{n_\gamma-1})$.

Corolarul 2.2.15. *Dacă pentru o familie de multialgebre complete este satisfăcută una din condiţiile echivalente a) sau b), atunci are loc condiţia iii) din Teorema 2.2.12.*

Într-adevăr, să considerăm $n_i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}^{(n_i)}(\tau)$, $a_i^0, \dots, a_i^{n_i-1} \in A_i$ $(i \in I)$. Pentru orice $i \in I$ avem $q_i(a_i^0, \dots, a_i^{n_i-1}) \neq \emptyset$, şi astfel există $a_i \in q_i(a_i^0, \dots, a_i^{n_i-1})$. Dar avem şi $a_i \in f_\gamma(b_i^0, \dots, b_i^{n_\gamma-1})$ pentru anumite elemente $b_i^0, \dots, b_i^{n_\gamma-1} \in A_i$, aşadar,

$$q_i(a_i^0, \dots, a_i^{n_i-1}) \cap f_\gamma(b_i^0, \dots, b_i^{n_\gamma-1}) \neq \emptyset,$$

şi deducem că pentru orice $i \in I$,

$$q_i(a_i^0, \dots, a_i^{n_i-1}) \subseteq f_\gamma(b_i^0, \dots, b_i^{n_\gamma-1}).$$

Rezultă că

$$\prod_{i\in I} q_i(a_i^0, \dots, a_i^{n_i-1}) \subseteq \prod_{i\in I} f_\gamma(b_i^0, \dots, b_i^{n_\gamma-1}) = f_\gamma((b_i^0)_{i\in I}, \dots, (b_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}),$$

şi incluziunea (2.2.3) este verificată, deci *iii*) are loc.

Observaţia 2.2.16. Condiţiile a) şi b) de mai sus nu sunt necesare pentru ca *iii*) din Teorema 2.2.12 să fie verificată. Excepţii pot fi găsite printre algebre universale, dar nu numai.

Exemplul 2.2.17. Considerăm multialgebrele $\mathfrak{A}_0$ şi $\mathfrak{A}_1$, de acelaşi tip (2,3,4) obţinute pe mulţimile $A_0 = \{1, 2, 3\}$, respectiv $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ astfel:

$$\mathfrak{A}_0 = (A, f_0^0, f_1^0, f_2^0),\ \mathfrak{A}_1 = (A, f_0^1, f_1^1, f_2^1),$$

unde $f_j^i : A_i^{j+2} \to P^*(A_i),\ i = 0, 1,\ j = 0, 1, 2,$

$$f_0^0(x, y) = \{1\},\ f_1^0(x, y, z) = \{2, 3\},\ f_2^0(x, y, z, t) = \{2, 3\},$$

$$f_0^1(x, y) = \{1, 2, 3\},\ f_1^1(x, y, z) = \{4\},\ f_2^1(x, y, z, t) = \{1, 2, 3\}.$$

Aceste multialgebre sunt complete, satisfac condiţia *iii*) din Teorema 2.2.12, dar nu verifică b) din Observaţia 2.2.14.

Observaţia 2.2.18. Din Corolarul 2.2.11 deducem că hipergrupurile complete sunt exemple de multialgebre complete cu proprietatea că pentru orice familie de astfel de multialgebre, algebra fundamentală a produsului direct este produsul direct al algebrelor fundamentale rezultate. Aceasta rezultă şi din Corolarul 2.2.15.

2.3 Limita directă a unui sistem direct de multialgebre

Amintim că un *sistem direct de mulţimi* constă dintr-o mulţime preordonată dirijată superior $(I, \leq)$, o familie de mulţimi $(A_i \mid i \in I)$ şi o familie de aplicaţii $(\varphi_{ij} : A_i \to A_j \mid i, j \in I,\ i \leq j)$ cu proprietatea că pentru orice $i, j, k \in I$, cu $i \leq j \leq k,\ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ şi $\varphi_{ii} = 1_{A_i}$, pentru orice $i \in I$. Pe reuniunea disjunctă A a mulţimilor A_i se defineşte relaţia $\equiv$ după cum urmează: oricare ar fi $x, y \in A$ există $i, j \in I$, astfel încât $x \in A_i,\ y \in A_j$, scriem $x \equiv y$ dacă şi numai dacă există $k \in I,\ i \leq k,\ j \leq k$ cu proprietatea că $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$. Această relaţie este o relaţie de echivalenţă pe A. Mulţimea cât $A/_{\equiv} = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$ (notată cu A_∞) se numeşte *limita directă a sistemului direct de mulţimi* $(A_i \mid i \in I)$.

Observaţia 2.3.1. Fie $\mathcal{I}$ categoria asociată mulţimii preordonate $(I, \leq)$. Dacă privim (ca în [68, Observaţia 5.14.5, a)]) sistemul direct de mulţimi $(A_i \mid i \in I)$ cu aplicaţiile $(\varphi_{ij} : A_i \to A_j \mid i, j \in I,\ i \leq j)$ ca un functor covariant de la $\mathcal{I}$ la categoria **Ens** a mulţimilor atunci mulţimea A_∞, împreună cu aplicaţiile

$$\varphi_{i\infty} : A_i \to A_\infty,\ \varphi_{i\infty}(x) = \widehat{x}\ (i \in I),$$

este limita directă a acestui functor ([68, Exemplul 5.14.6, f)]). Notăm că pentru orice $i, j \in I$ cu $i \leq j$ avem

$$\varphi_{j\infty} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{i\infty}.$$

Dacă fiecare mulţime A_i este mulţime suport pentru o multialgebră $\mathfrak{A}_i$ de tip τ şi φ_{ij} sunt omomorfisme de multialgebre atunci familiile $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ şi $(\varphi_{ij} : A_i \to A_j \mid i, j \in I,\ i \leq j)$ formează un *sistem direct de multialgebre*. Vom nota acest sistem cu

$$\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} : A_i \to A_j \mid i, j \in I,\ i \leq j)).$$

Dacă $(I, \leq)$ este bine ordonată atunci ne vom referi la *sistemul direct de multialgebre* $\mathcal{A}$ ca fiind *bine ordonat*.

Observaţia 2.3.2. În unele situaţii, când nu e necesar să precizăm care sunt omomorfismele dintr-un sistem direct $\mathcal{A}$, vom folosi doar familia de multialgebre $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ pentru a face referire la $\mathcal{A}$.

Pentru orice $\gamma < o(\tau)$ egalităţile

$$\begin{aligned} f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}}) = &\{\widehat{x'} \mid \exists m \in I,\ \forall j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\},\ \exists x'_j \in \widehat{x_j} \cap A_m, \\ &\text{astfel încât } x' \in f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})\}, \end{aligned}$$

fiind independente de alegerea reprezentanţilor $x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1}$, definesc o multioperaţie f_γ pe A_∞. Obţinem o multialgebră $\mathfrak{A}_\infty$ de tip τ pe A_∞.

Exemplul 2.3.3. Pentru un sistem direct de semihipergrupuri $((H_i, \circ_i) \mid i \in I)$, multioperaţia $\circ$ pe limita directă de mulţimi H_i se defineşte astfel:

$$\begin{aligned} \widehat{z} \in \widehat{x} \circ \widehat{y} \ \Leftrightarrow &\ \exists m \in I,\ \exists x_m \in \widehat{x} \cap A_m,\ \exists y_m \in \widehat{y} \cap A_m,\ \exists z_m \in \widehat{z} \cap A_m, \\ &\text{astfel încât } z_m \in x_m \circ_m y_m. \end{aligned}$$

În acest fel se obţine în [70] *limita directă* $(H_\infty, \circ)$ *a sistemului direct de semihipergrupuri* $((H_i, \circ_i) \mid i \in I)$.

Lema 2.3.4. *Fie* $\gamma < o(\tau)$ *şi* $\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}} \in A_\infty$. *Dacă* $i_0, \ldots, i_{n_\gamma-1} \in I$ *sunt astfel încât* $x_0 \in A_{i_0}, \ldots, x_{n_\gamma-1} \in A_{i_{n_\gamma-1}}$ *atunci*

$$\begin{aligned} f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}}) = &\{\widehat{x'} \in A_\infty \mid \exists m \in I,\ i_0 \leq m, \ldots, i_{n_\gamma-1} \leq m : \\ &x' \in f_\gamma(\varphi_{i_0 m}(x_0), \ldots, \varphi_{i_{n_\gamma-1} m}(x_{n_\gamma-1}))\}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Dacă $m \in I$, $i_0 \le m, \ldots, i_{n_\gamma - 1} \le m$ şi $x' \in f_\gamma(\varphi_{i_0 m}(x_0), \ldots, \varphi_{i_{n_\gamma-1} m}(x_{n_\gamma - 1}))$ atunci, considerând pentru fiecare $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, $x'_j = \varphi_{i_j m}(x_j)$ avem $x'_j \in \widehat{x_j} \cap A_m$ şi $x' \in f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})$, deci $\widehat{x'} \in f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}})$.

Reciproc, dacă $\widehat{x''} \in f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}})$ atunci există $m' \in I$ cu proprietatea că pentru orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ există $x''_j \in \widehat{x_j} \cap A_{m'}$ astfel încât $x'' \in f_\gamma(x''_0, \ldots, x''_{n_\gamma-1})$. Înseamnă că pentru orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ există $x''_j \in A_{m'}$ astfel ca $x''_j \equiv x_j$ sau, altfel spus, pentru orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ există $m_j \in I$, cu $m' \le m_j$, $i_j \le m_j$ cu proprietatea că $\varphi_{i_j m_j}(x_j) = \varphi_{m' m_j}(x''_j)$. Dacă luăm $m \in I$ cu $m_0 \le m, \ldots, m_{n_\gamma-1} \le m$ atunci, evident, $m' \le m$, $i_0 \le m, \ldots, i_{n_\gamma-1} \le m$ şi astfel avem $x'' \equiv \varphi_{m'm}(x'')$ şi

$$\varphi_{m'm}(x'') \in \varphi_{m'm}(f_\gamma(x''_0, \ldots, x''_{n_\gamma-1})) \subseteq f_\gamma(\varphi_{m'm}(x''_0), \ldots, \varphi_{m'm}(x''_{n_\gamma-1})).$$

Dar, pentru orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$,

$$\varphi_{m'm}(x''_j) = \varphi_{m_j m}(\varphi_{m' m_j}(x''_j)) = \varphi_{m_j m}(\varphi_{i_j m_j}(x_j)) = \varphi_{i_j m}(x_j),$$

de unde rezultă că

$$\varphi_{m'm}(x'') \in f_\gamma(\varphi_{m'm}(x''_0), \ldots, \varphi_{m'm}(x''_{n_\gamma-1})) = f_\gamma(\varphi_{i_0 m}(x_0), \ldots, \varphi_{i_{n_\gamma-1} m}(x_{n_\gamma-1})),$$

ceea ce completează demonstraţia lemei. $\square$

Observaţia 2.3.5. Dacă pentru $\gamma < o(\tau)$, f_γ este operaţie în toate multialgebrele $\mathfrak{A}_i$, atunci f_γ este operaţie în $\mathfrak{A}_\infty$. De fapt, ca pentru un $\gamma < o(\tau)$ dat, f_γ să fie operaţie în $\mathfrak{A}_\infty$ este suficient ca pentru orice două elemente din I să existe o majorantă $m \in I$ astfel încât în $\mathfrak{A}_m$, f_γ să fie operaţie.

Într-adevăr, să considerăm $\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}} \in A_\infty$, cu $x_j \in A_{i_j}$ $(i_j \in I)$ pentru orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ şi să luăm clasele $\widehat{x'}, \widehat{x''} \in f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}})$. Atunci există $m', m'' \in I$ cu $i_j \le m'$, $i_j \le m''$, pentru toţi $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, cu proprietatea că

$$x' \in f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1}) \subseteq A'_m \text{ şi } x'' \in f_\gamma(x''_0, \ldots, x''_{n_\gamma-1}) \subseteq A''_m,$$

unde $x'_j = \varphi_{i_j m'}(x_j)$ şi $x''_j = \varphi_{i_j m''}(x_j)$ pentru orice $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Dacă $m \in I$, $m' \le m$, $m'' \le m$ are proprietatea că f_γ este operaţie pe A_m atunci

$$\begin{aligned}\varphi_{m'm}(x') &\in \varphi_{m'm}(f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})) \subseteq f_\gamma(\varphi_{m'm}(x'_0), \ldots, \varphi_{m'm}(x'_{n_\gamma-1}))\\ &= f_\gamma(\varphi_{m'm}(\varphi_{i_0 m'}(x_0), \ldots, \varphi_{m'm}(\varphi_{i_{n_\gamma-1} m'}(x_{n_\gamma-1})))\\ &= f_\gamma(\varphi_{i_0 m}(x_0), \ldots, \varphi_{i_{n_\gamma-1} m}(x_{n_\gamma-1})))\end{aligned}$$

şi similar,

$$\varphi_{m''m}(x'') \in f_\gamma(\varphi_{i_0m}(x_0),\ldots,\varphi_{i_{n_\gamma-1}m}(x_{n_\gamma-1}))).$$

Dar submulţimea $f_\gamma(\varphi_{i_0m}(x_0),\ldots,\varphi_{i_{n_\gamma-1}m}(x_{n_\gamma-1})))$ a lui A_m este o mulţine cu un element, deci $\varphi_{m'm}(x') = \varphi_{m''m}(x'')$ şi $\widehat{x'} = \widehat{x''}$.

Observaţia 2.3.6. Cum pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi pentru orice elemente $x_0,\ldots,x_{n_\gamma-1} \in A_i$, folosind Lema 2.3.4 avem

$$\begin{aligned}\varphi_{i\infty}(f_\gamma(x_0,\ldots,x_{n_\gamma-1})) &= \{\varphi_{i\infty}(x) \mid x \in f_\gamma(x_0,\ldots,x_{n_\gamma-1})\}\\ &= \{\widehat{x} \mid x \in f_\gamma(x_0,\ldots,x_{n_\gamma-1})\}\\ &\subseteq f_\gamma(\widehat{x_0},\ldots,\widehat{x_{n_\gamma-1}})\\ &= f_\gamma(\varphi_{i\infty}(x_0),\ldots,\varphi_{i\infty}(x_{n_\gamma-1})).\end{aligned}$$

Rezultă că aplicaţiile $\varphi_{i\infty}$ sunt omomorfisme de multialgebre.

Teorema 2.3.7. *Să privim sistemul direct format din multialgebre $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ şi omomorfismele $(\varphi_{ij} : A_i \to A_j \mid i,j \in I,\ i \le j)$ ca un functor covariant $G : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{Malg}(\tau)$. Multialgebra $\mathfrak{A}_\infty$ împreună cu familia de omomorfisme $(\varphi_{i\infty} \mid i \in I)$ este limita directă a functorului G.*

Demonstraţie. Să considerăm următoarele diagrame:

$$\begin{tikzcd} A_\infty & \\ A_i \arrow[u, "\varphi_{i\infty}"] \arrow[r, "\varphi_{ij}"'] & A_j \arrow[ul, "\varphi_{j\infty}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A' \\ A_i \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[r, "\varphi_{ij}"'] & A_j \arrow[u, "\alpha_j"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_\infty \arrow[r, "\mu"] & A' \\ A_i \arrow[u, "\varphi_{i\infty}"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}.$$

Comutativitatea primei diagrame rezultă din Observaţia 2.3.1. Dacă o multialgebră $\mathfrak{A}' = (A', (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$, împreună cu o familie de omomorfisme $(\alpha_i : A_i \to A' \mid i \in I)$ face comutativă a doua diagramă atunci există un unic omomorfism $\mu : A_\infty \to A'$ pentru care a treia diagramă este comutativă. Din Observaţia 2.3.1 deducem că o aplicaţie μ cu această proprietate există şi este unică. Ea este definită astfel: dacă $\widehat{x} \in A_\infty$ atunci există $i \in I$ astfel încât $x \in A_i$, iar $\mu(\widehat{x}) = \mu(\varphi_{i\infty}(x)) = \alpha_i(x)$. Rămâne, deci, de demonstrat că μ este un omomorfism de multialgebre.

Fie $\gamma < o(\tau)$ şi $\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma - 1}} \in A_\infty$. Putem considera că toţi reprezentanţii $x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1}$ ai acestor clase sunt în A_m. Atunci avem:

$$\begin{aligned}
&\mu(f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}})) \\
&\qquad = \{\mu(\widehat{x}) \mid \exists m' \in I,\ m \le m',\ x \in f_\gamma(\varphi_{mm'}(x_0), \ldots, \varphi_{mm'}(x_{n_\gamma-1}))(\subseteq A_{m'})\} \\
&\qquad = \{\alpha_{m'}(x) \mid m' \in I,\ m \le m',\ x \in f_\gamma(\varphi_{mm'}(x_0), \ldots, \varphi_{mm'}(x_{n_\gamma-1}))\} \\
&\qquad = \bigcup \{\alpha_{m'}(f_\gamma(\varphi_{mm'}(x_0), \ldots, \varphi_{mm'}(x_{n_\gamma-1}))) \mid m' \in I,\ m \le m'\} \\
&\qquad \subseteq \bigcup \{f_\gamma(\alpha_{m'}(\varphi_{mm'}(x_0)), \ldots, \alpha_{m'}(\varphi_{mm'}(x_{n_\gamma-1}))) \mid m' \in I,\ m \le m'\}.
\end{aligned}$$

Dar comutativitatea diagramei secunde are loc pentru orice $i, j \in I$, $i \le j$ şi cum $m' \in I$, $m \le m'$ rezultă că

$$f_\gamma(\alpha_{m'}(\varphi_{mm'}(x_0)), \ldots, \alpha_{m'}(\varphi_{mm'}(x_{n_\gamma-1}))) = f_\gamma(\alpha_m(x_0), \ldots, \alpha_m(x_{n_\gamma-1}))$$

şi astfel,

$$\mu(f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}})) \subseteq f_\gamma(\alpha_m(x_0), \ldots, \alpha_m(x_{n_\gamma-1})) = f_\gamma(\mu(\widehat{x_0}), \ldots, \mu(\widehat{x_{n_\gamma-1}}))$$

ceea ce completează demonstraţia teoremei. $\square$

Definiţia 2.3.1. Vom numi multialgebra $\mathfrak{A}_\infty$ *limita directă a sistemului direct de multialgebre* $\mathcal{A}$ şi o vom nota $\varinjlim \mathcal{A}$ sau $\varinjlim_{i\in I} \mathfrak{A}_i$.

Următoarele trei rezultate sunt generalizări ale unor rezultate cunoscute pentru algebre universale care pot fi găsite în [29, §21]. În Propoziţia 2.3.8 şi Teorema 2.3.10 vom obţine izomorfisme între limitele directe ale unor sisteme directe de multialgebre. Existenţa unor bijecţii între mulţimile suport ale multialgebrelor limită directă, precum şi forma acestora pot fi preluate din demostraţiile unor rezultate din [29, §21]. Mai mult chiar, odată ce au fost stabilite Propoziţia 2.3.8 şi Teorema 2.3.10, Teorema 2.3.12 se demonstrează la fel ca [29, §21, Teorema 4]. Totuşi, pentru a face prezentarea mai uşor de urmărit, Propoziţia 2.3.8 şi Teoremele 2.3.10 şi 2.3.12 vor apărea cu demonstraţii complete în teza noastră.

În cele ce vor urma în acest paragraf când vom vorbi despre un sistem direct $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ de multialgebre vom considera că $(I, \le)$ este o mulţime ordonată dirijată superior (cu toate că unele rezultate sunt verificate şi în ipoteza în care mulţimile de indici ar fi doar preordonate).

Fie $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i, j \in I,\ i \leq j))$ un sistem direct de multialgebre şi fie $J \subseteq I$ cu proprietatea că $(J, \leq)$ este, de asemenea, o mulţime ordonată dirijată superior. Vom nota cu $\mathcal{A}_J$ sistemul direct format din multialgebrele $(\mathfrak{A}_i \mid i \in J)$ şi omomorfismele $(\varphi_{ij} \mid i, j \in J,\ i \leq j)$.

Propoziţia 2.3.8. *Fie $\mathcal{A}$ un sistem direct de multialgebre având ca mulţime de indici pe $(I, \leq)$. Dacă $J \subseteq I$ are proprietatea că $(J, \leq)$ este o mulţime ordonată dirijată superior cofinală în $(I, \leq)$ atunci multialgebrele $\varinjlim \mathcal{A}$ şi $\varinjlim \mathcal{A}_J$ sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Notăm $\varinjlim \mathcal{A} = \mathfrak{A}_\infty = (A_\infty, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$ şi $\varinjlim \mathcal{A}_J = \mathfrak{A}'_\infty = (A'_\infty, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$. De asemenea, notăm elementele mulţimii A_∞ folosind indicele I (de exemplu, $\widehat{x}_I$) şi elementele lui A'_∞ folosind indicele J (de exemplu, $\widehat{x}_J$).

Este bine să observăm că în fiecare clasă $\widehat{x}_I$ se găseşte un reprezentant din $\bigcup_{j \in J} A_j$, anume dacă $x \in A_i$, cu $i \in I$, deoarece există $j \in J$ astfel încât $i \leq j$ şi $x \equiv \varphi_{ij}(x)$, se obţine că $\widehat{x}_I = (\widehat{\varphi_{ij}(x)})_I$ şi $\varphi_{ij}(x) \in A_j \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$. Cum egalitatea în A_∞ a două clase având ca reprezentanţi elemente din $\bigcup_{j \in J} A_j$ aduce cu sine egalitatea claselor corespunzătoare acestor elemente în A'_∞, se poate defini o funcţie

$$\psi : A_\infty \to A'_\infty,\ \psi(\widehat{x}_I) = \widehat{x}_J,$$

unde $x \in A_j$, $j \in J$. Să arătăm că această funcţie realizează izomorfismul dorit.

Evident funcţia ψ este surjectivă, iar dacă pentru $x' \in A_{j'}$, $x'' \in A_{j''}$, $j', j'' \in J \subseteq I$ are loc $(\widehat{x'})_J = (\widehat{x''})_J$ atunci există $j \in J \subseteq I$ cu $j' \leq j$, $j'' \leq j$ astfel încât $\varphi_{j'j}(x') = \varphi_{j''j}(x'')$, adică $(\widehat{x'})_I = (\widehat{x''})_I$. Aşadar, ψ este bijectivă.

Pentru a completa demonstraţia, vom arăta că ψ este un omomorfism ideal între multialgebrele $\mathfrak{A}_\infty$ şi $\mathfrak{A}'_\infty$. Să considerăm $\gamma < o(\tau)$, $(\widehat{x_0})_I, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_I \in A_\infty$. Putem presupune că $x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1} \in \bigcup_{i \in J} A_i$, cu alte cuvinte, există $i_0, \ldots, i_{n_\gamma - 1} \in J$ astfel ca $x_0 \in A_{i_0}, \ldots, x_{n_\gamma - 1} \in A_{i_{n_\gamma - 1}}$. Mulţimea $f_\gamma((\widehat{x_0})_I, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_I)$ este egală cu mulţimea

$$\{(\widehat{x'})_I \mid \exists m \in I,\ i_0, \ldots, i_{n_\gamma - 1} \leq m,\ x' \in f_\gamma(\varphi_{i_0 m}(x_0), \ldots, \varphi_{i_{n_\gamma - 1} m}(x_{n_\gamma - 1}))\}.$$

Cum J este cofinală în I, pentru un element $m \in I$, $i_0, \ldots, i_{n_\gamma - 1} \leq m$, pentru care are loc apartenenţa $x' \in f_\gamma(\varphi_{i_0 m}(x_0), \ldots, \varphi_{i_{n_\gamma - 1} m}(x_{n_\gamma - 1}))$ găsim un element $m' \in J$, $m \leq m'$, şi astfel avem $x' \equiv \varphi_{mm'}(x')$ şi

$$\begin{aligned}\varphi_{mm'}(x') &\in \varphi_{mm'}(f_\gamma(\varphi_{i_0m}(x_0),\ldots,\varphi_{i_{n_\gamma-1}m}(x_{n_\gamma-1})))\\ &\subseteq f_\gamma(\varphi_{mm'}(\varphi_{i_0m}(x_0)),\ldots,\varphi_{mm'}(\varphi_{i_{n_\gamma-1}m}(x_{n_\gamma-1})))\\ &= f_\gamma(\varphi_{i_0m'}(x_0),\ldots,\varphi_{i_{n_\gamma-1}m'}(x_{n_\gamma-1})).\end{aligned}$$

În consecinţă, mulţimea $f_\gamma((\widehat{x_0})_I,\ldots,(\widehat{x_{n_\gamma-1}})_I)$ poate fi scrisă

$$\{(\widehat{x'})_I \mid \exists m\in J,\ i_0,\ldots,i_{n_\gamma-1}\le m,\ x'\in f_\gamma(\varphi_{i_0m}(x_0),\ldots,\varphi_{i_{n_\gamma-1}m}(x_{n_\gamma-1}))\}.$$

Deducem că mulţimea $\psi(f_\gamma((\widehat{x_0})_I,\ldots,(\widehat{x_{n_\gamma-1}})_I))$ este egală cu

$$\begin{aligned}&\{\psi((\widehat{x'})_I) \mid \exists m\in J,\ i_0,\ldots,i_{n_\gamma-1}\le m,\ x'\in f_\gamma(\varphi_{i_0m}(x_0),\ldots,\varphi_{i_{n_\gamma-1}m}(x_{n_\gamma-1}))\}\\ =&\{(\widehat{x'})_J \mid \exists m\in J,\ i_0,\ldots,i_{n_\gamma-1}\le m,\ x'\in f_\gamma(\varphi_{i_0m}(x_0),\ldots,\varphi_{i_{n_\gamma-1}m}(x_{n_\gamma-1}))\}\\ =&f_\gamma((\widehat{x_0})_J,\ldots,(\widehat{x_{n_\gamma-1}})_J) = f_\gamma(\psi((\widehat{x_0})_I),\ldots,\psi((\widehat{x_{n_\gamma-1}})_I)),\end{aligned}$$

deci ψ este un izomorfism. □

Observaţia 2.3.9. Această propoziţie rezultă imediat din [56, Propoziţia 2.11, Capitolul II]. Am dat, însă, o demonstraţie directă a acestui fapt deoarece vom folosi ulterior forma acestui izomorfism.

Să considerăm că mulţimea suport I a mulţimii ordonate $(I,\le)$ pe care este construit sistemul direct $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i\in I),(\varphi_{ij} \mid i,j\in I,\ i\le j))$ de multialgebre poate fi scrisă ca o reuniune $I=\bigcup_{p\in P} I_p$, unde $(I_p,\le)$ este o mulţime ordonată dirijată superior pentru fiecare $j\in P$ şi $(P,\le)$ este, de asemenea, o mulţime ordonată dirijată superior cu proprietatea că $I_p\subseteq I_q$, pentru orice $p,q\in P,\ p\le q$. Notăm

$$\varinjlim\mathcal{A} = \mathfrak{A}_\infty = (A_\infty,(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)}) \text{ şi } \varinjlim\mathcal{A}_{I_p} = \mathfrak{A}^p_\infty = (A^p_\infty,(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})\ (p\in P).$$

Atunci, pentru orice $p,q\in P,\ p\le q$ se poate defini aplicaţia

$$\psi_{pq} : A^p_\infty \to A^q_\infty,\ \psi_{pq}(\widehat{x}_{I_p}) = \widehat{x}_{I_q},$$

(unde $x\in A_i,\ i\in I_p$). Se constată că fiecare ψ_{pp} este aplicaţia identică şi că pentru orice $p\le q\le r$ din P şi orice $x\in\bigcup_{i\in I_p} A_i$ avem

$$\psi_{qr}(\psi_{pq}(\widehat{x}_{I_p})) = \psi_{qr}(\widehat{x}_{I_q}) = \widehat{x}_{I_r} = \psi_{pr}(\widehat{x}_{I_p}).$$

Astfel, s-a obţinut un sistem direct de mulţimi constând din mulţimea ordonată $(P, \leq)$, mulţimile suport ale multialgebrelor $\mathfrak{A}_\infty^p$ şi funcţiile ψ_{pq}, sistem pe care îl notăm cu $\mathcal{A}/P$.

Teorema 2.3.10. *Dacă $\mathcal{A}$ este un sistem direct de multialgebre atunci $\mathcal{A}/P$ este un sistem direct de multialgebre şi multialgebrele $\underrightarrow{\lim}\mathcal{A}$ şi $\underrightarrow{\lim}\mathcal{A}/P$ sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Să începem prin a verifica pentru orice $p, q \in P$, $p \leq q$, că aplicaţia ψ_{pq} este un omomorfism de multialgebre. Fie $\gamma < o(\tau)$ şi $(\widehat{x_j})_{I_p} \in A_\infty^p$, $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Putem considera că $x_j \in A_m$, cu $m \in I_p$, pentru toţi $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ şi avem

$$\begin{aligned}
&\psi_{pq}(f_\gamma((\widehat{x_0})_{I_p}, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_p}))\\
&\qquad =\{\psi_{pq}(\widehat{x}_{I_p}) \mid \exists m' \in I_p,\ m \leq m',\ x \in f_\gamma(\varphi_{mm'}(x_0), \ldots, \varphi_{mm'}(x_{n_\gamma - 1}))\}\\
&\qquad =\{\widehat{x}_{I_q} \mid \exists m' \in I_p \subseteq I_q,\ m \leq m',\ x \in f_\gamma(\varphi_{mm'}(x_0), \ldots, \varphi_{mm'}(x_{n_\gamma - 1}))\}\\
&\qquad \subseteq\{\widehat{x}_{I_q} \mid \exists m' \in I_q,\ m \leq m',\ x \in f_\gamma(\varphi_{mm'}(x_0), \ldots, \varphi_{mm'}(x_{n_\gamma - 1}))\}\\
&\qquad =f_\gamma((\widehat{x_0})_{I_q}, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_q}) = f_\gamma(\psi_{pq}((\widehat{x_0})_{I_p}), \ldots, \psi_{pq}((\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_p})).
\end{aligned}$$

Să notăm multialgebra $\underrightarrow{\lim}\mathcal{A}/P$ cu $\mathfrak{A}_\infty^* = (A_\infty^*, (f_\gamma)_{\gamma < o(\tau)})$.

Pentru $x \in A_i$, $i \in I$, se alege $p \in P$ astfel încât $i \in I_p$ şi se ia $y = \widehat{x}_{I_p} \in A_\infty^p$. Atunci

$$\psi : A_\infty \to A_\infty^*,\ \psi(\widehat{x}_I) = \widehat{y}_P$$

este un izomorfism între multialgebrele $\mathfrak{A}_\infty$ şi $\mathfrak{A}_\infty^*$.

Pentru a arăta că ψ este bine definită, se consideră $x \in A_i$, $z \in A_j$, $i \in I_p$, $j \in I_q$ $(p, q \in P)$ cu proprietatea că $\widehat{x}_I = \widehat{z}_I$, $y = \widehat{x}_{I_p}$, $w = \widehat{z}_{I_q}$ şi se verifică egalitatea $\widehat{y}_P = \widehat{w}_P$. Din $\widehat{x}_I = \widehat{z}_I$ rezultă că există $k \in I$ cu $i \leq k$, $j \leq k$ astfel încât $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(z)$. Fie $r' \in P$ o majorantă pentru p şi q, fie $r'' \in P$ cu proprietatea că $I_{r''}$ conţine pe k şi fie $r \in P$ pentru care $r', r'' \leq r$. Atunci $p, q \leq r$, $k \in I_r$ şi $\widehat{x}_{I_r} = \widehat{z}_{I_r}$. Prin urmare,

$$\psi_{pr}(y) = \psi_{pr}(\widehat{x}_{I_p}) = \widehat{x}_{I_r} = \widehat{z}_{I_r} = \psi_{qr}(\widehat{z}_{I_q}) = \psi_{qr}(w),$$

ceea ce însemnă că $\widehat{y}_P = \widehat{w}_P$.

Funcţia ψ este surjectivă deoarece orice clasă $\widehat{y}_P$ are un reprezentant $y \in A_\infty^p$, cu $p \in P$, adică există $i \in I_p$ şi $x \in A_i$ astfel ca $y = \widehat{x}_{I_p}$ ceea ce, în mod evident, implică $\psi(\widehat{x}_I) = \widehat{y}_P$.

De asemenea, ψ este injectivă. Într-adevăr, dacă $x \in A_i$, $z \in A_j$, $i \in I_p$, $j \in I_q$ şi $y = \widehat{x}_{I_p}$, $w = \widehat{z}_{I_q}$ verifică egalitatea $\widehat{y}_P = \widehat{w}_P$ atunci există $r \in P$ cu $p \leq r$, $q \leq r$ astfel încât

$\psi_{pr}(\widehat{x}_{I_p}) = \psi_{qr}(\widehat{z}_{I_q})$, adică $\widehat{x}_{I_r} = \widehat{z}_{I_r}$. În consecinţă, i şi j au o majorantă k în $I_r \subseteq I$ astfel încât $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(z)$ şi astfel, $\widehat{x}_I = \widehat{z}_I$.

Pentru a finaliza demonstraţia teoremei mai trebuie verificat faptul că ψ este un omomorfism ideal de multialgebre. Să considerăm pentru aceasta $\gamma < o(\tau)$ şi $(\widehat{x_j})_I \in A_\infty,\ j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Se observă uşor că toţi reprezentanţii x_j pot fi luaţi din aceeaşi mulţime A_i, cu $i \in I$ convenabil ales şi putem alege $p \in P$ astfel încât $i \in I_p$. Atunci avem

$$\begin{aligned}&\psi(f_\gamma((\widehat{x_0})_I, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_I))\\ &\qquad = \{\psi(\widehat{x}_I) \mid \exists m \in I,\ i \leq m,\ x \in f_\gamma(\varphi_{im}(x_0), \ldots, \varphi_{im}(x_{n_\gamma - 1}))\}.\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{gathered}\{\psi(\widehat{x}_I) \mid \exists m \in I, i \leq m,\ x \in f_\gamma(\varphi_{im}(x_0), \ldots, \varphi_{im}(x_{n_\gamma - 1}))\} = \{\widehat{y}_P \mid \exists p' \in P,\\ p \leq p',\ y \in f_\gamma((\widehat{x_0})_{I_{p'}}, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_{p'}})\}\end{gathered}$$

Într-adevăr, să luăm un element $\psi(\widehat{x}_I)$ din membrul stâng. Evident,

$$x \in f_\gamma(\varphi_{im}(x_0), \ldots, \varphi_{im}(x_{n_\gamma - 1}))$$

pentru un $m \in I,\ i \leq m$. Să luăm $p_m \in P$ astfel ca $m \in I_{p_m}$. Cum $(P, \leq)$ este dirijată superior, există $p' \in P$ cu proprietatea că $p \leq p'$, $p_m \leq p'$ ceea ce implică $i, m \in I_{p'}$. Folosind Lema 2.3.4 rezultă că

$$\widehat{x}_{I_{p'}} \in f_\gamma((\widehat{x_0})_{I_{p'}}, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_{p'}}).$$

Considerând $y = \widehat{x}_{I_{p'}}$ obţinem că $\psi(\widehat{x}_I) = \widehat{y}_P$ este în mulţimea din membrul drept. Reciproc, luăm $\widehat{y}_P$ din membrul drept şi $p' \in P$, $p \leq p'$ astfel ca

$$y = \widehat{x}_{I_{p'}} \in f_\gamma((\widehat{x_0})_{I_{p'}}, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_{p'}}).$$

Folosind, din nou, Lema 2.3.4 obţinem existenţa unui element $m \in I_{p'} \subseteq I$, cu $i \leq m$ cu proprietatea că reprezentantul x al clasei $y \in A_\infty^{p'}$ este în mulţimea $f_\gamma(\varphi_{im}(x_0), \ldots, \varphi_{im}(x_{n_\gamma - 1}))$. E clar că $\psi(\widehat{x}_I) = \widehat{y}_P$ este şi în mulţimea din membrul stâng şi egalitatea celor două mulţimi este demonstrată.

Această egalitate ne conduce la

$$\begin{aligned}
&\psi(f_\gamma((\widehat{x_0})_I,\ldots,(\widehat{x_{n_\gamma-1}})_I))\\
&\qquad=\{\widehat{y}_P \mid \exists p'\in P,\ p\le p',\ y\in f_\gamma((\widehat{x_0})_{I_{p'}},\ldots,(\widehat{x_{n_\gamma-1}})_{I_{p'}})\}\\
&\qquad=\{\widehat{y}_P \mid \exists p'\in P,\ p\le p',\ y\in f_\gamma(\psi_{pp'}((\widehat{x_0})_{I_p}),\ldots,\psi_{pp'}((\widehat{x_{n_\gamma-1}})_{I_p}))\}\\
&\qquad=f_\gamma(\psi((\widehat{x_0})_I),\ldots,\psi((\widehat{x_{n_\gamma-1}})_I)),
\end{aligned}$$

aşadar ψ este un omomorfism ideal. □

Vom împrumuta de la algebre universale termenul de *clasă algebrică* pentru acele clase de multialgebre care sunt închise la izomorfisme. De asemenea, vom spune că o *clasă de multialgebre* este *închisă la limite directe de sisteme directe* (*bine ordonate*) dacă pentru orice sistem direct (bine ordonat) de multialgebre din această clasă limita directă este o multialgebră din această clasă.

În demonstraţia Teoremei 2.3.12 vom face uz de următorul rezultat:

Lema 2.3.11. *[29, Exerciţiul 44, pp.73] Dacă $(P,\le)$ este o mulţime ordonată infinită dirijată superior atunci mulţimea P poate fi reprezentată ca o reuniune $P=\bigcup(P_\delta \mid \delta<\alpha)$ (α fiind un ordinal), unde $(P_\delta,\le)$ este dirijată superior şi $|P_\delta|<|P|$ pentru orice ordinal $\delta<\alpha$, iar $P_{\delta_1}\subseteq P_{\delta_2}$ pentru orice $\delta_1<\delta_2<\alpha$.*

Teorema 2.3.12. *Fie K o clasă algebrică de multialgebre. Clasa K este închisă la limite directe de sisteme directe arbitrare dacă şi numai dacă este închisă la limite directe de sisteme directe bine ordonate.*

Demonstraţie. Presupunem K închisă la limite directe de sisteme directe bine ordonate şi fie $\mathcal{A}=(\mathfrak{A}_i \mid i\in I)$ un sistem direct de multialgebre din K. Dacă afirmaţia din enunţ nu ar fi adevărată, atunci s-ar putea alege $\mathcal{A}$ astfel ca $\varinjlim\mathcal{A}\notin K$ şi $|I|=\mathfrak{m}$ este cel mai mic cardinal cu această proprietate. Dacă $(I,\le)$ este o mulţime ordonată finită dirijată superior atunci ea are un cel mai mare element i, $(\{i\},\le)$ este cofinală în $(I,\le)$ şi astfel, conform Propoziţiei 2.3.8, $\varinjlim\mathcal{A}\cong\mathfrak{A}_i\in K$. Înseamnă că $\mathfrak{m}\ge\aleph_0$, de unde, folosind Lema 2.3.11, rezultă că I se poate scrie $I=\bigcup(I_\delta \mid \delta<\alpha)$, cu α ordinal, cu $(I_\delta,\le)$ dirijată superior, $|I_\delta|<|I|=\mathfrak{m}$ şi $I_{\delta_1}\subseteq I_{\delta_2}$ dacă $\delta_1<\delta_2<\alpha$. Astfel, $\varinjlim\mathcal{A}_{I_\delta}\in K$ datorită minimalităţii lui $\mathfrak{m}$ şi, conform Teoremei 2.3.10, $\varinjlim\mathcal{A}\cong\varinjlim\mathcal{A}/P$, unde $P=\{\delta \mid \delta<\alpha\}$. Aşadar, ipoteza K

închisă la limite directe de sisteme directe bineordonate conduce la $\varinjlim \mathcal{A}/P \in K$ şi astfel $\varinjlim \mathcal{A} \in K$, contradicţie.

Cum cealaltă implicaţie este evidentă teorema este demonstrată. $\square$

Aplicaţii la multialgebre particulare

În această secţiune vom arăta că multialgebrele definite prin identităţi precum şi multialgebrele complete de un tip dat formează clase închise la limite directe de sisteme directe. De asemenea, vom vedea că unele din rezultatele cunoscute referitoare la limite directe ale unor multialgebre particulare pot fi uşor deduse din rezultatele prezentate în acest paragraf.

Pentru început, să demonstrăm următoarea lemă:

Lema 2.3.13. *Fie $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i, j \in I,\ i \leq j))$ un sistem direct de multialgebre, fie $\mathbf{p} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. Atunci*

$$\begin{aligned} p(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) =& \{\widehat{a} \mid \exists m \in I,\ \forall j \in \{0, \ldots, n-1\},\ \exists a'_j \in \widehat{a_j} \cap A_m \\ & \textit{astfel încât } a \in p(a'_0, \ldots, a'_{n-1})\}. \end{aligned}$$

Dacă $i_0, \ldots, i_{n-1} \in I$ au proprietatea că $a_j \in A_{i_j}$ pentru orice $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ atunci

$$p(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) = \{\widehat{a} \mid \exists m \in I,\ i_0, \ldots, i_{n-1} \leq m,\ a \in p(\varphi_{i_0 m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1} m}(a_{n-1}))\}.$$

Demonstraţie. Asemănător cu demonstraţia Lemei 2.3.4 se arată că cele două mulţimi prin care am exprimat pe $p(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$ sunt egale. Într-adevăr, dacă există $m' \in I$ cu proprietatea că pentru orice $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ există $a''_j \in \widehat{a_j} \cap A_{m'}$ astfel încât $a'' \in p(a''_0, \ldots, a''_{n-1})$ atunci pentru orice $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ există $m_j \in I$, cu $m' \leq m_j$, $i_j \leq m_j$ cu proprietatea că $\varphi_{i_j m_j}(a_j) = \varphi_{m' m_j}(a''_j)$. Dacă luăm $m \in I$ cu $m_0 \leq m, \ldots, m_{n-1} \leq m$ atunci, evident, $m' \leq m,\ i_0 \leq m, \ldots, i_{n-1} \leq m$; astfel avem $a'' \equiv \varphi_{m'm}(a'')$ şi, folosind Propoziţia 1.4.9, obţinem

$$\varphi_{m'm}(a'') \in \varphi_{m'm}(p(a''_0, \ldots, a''_{n-1})) \subseteq p(\varphi_{m'm}(a''_0), \ldots, \varphi_{m'm}(a''_{n-1})).$$

Dar, pentru orice $j \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$\varphi_{m'm}(a''_j) = \varphi_{m_j m}(\varphi_{m' m_j}(a''_j)) = \varphi_{m_j m}(\varphi_{i_j m_j}(a_j)) = \varphi_{i_j m}(a_j),$$

de unde rezultă că

$$\varphi_{m'm}(a'') \in p(\varphi_{m'm}(a''_0), \ldots, \varphi_{m'm}(a''_{n-1})) = p(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})).$$

Incluziunea inversă este evidentă.

Este suficient, acum, să demonstrăm partea a doua din enunţ. Vom face aceasta prin inducţie după etapele de construcţie a unui simbol polinomial.

Pasul 1. Dacă $\mathbf{p} = \mathbf{x}_j$ $(j \in \{0, \ldots, n-1\})$ atunci

$$p(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) = e^n_j(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) = \widehat{a_j}.$$

Oricare ar fi $m \in I$, $i_0, \ldots, i_{n-1} \leq m$ şi oricare ar fi

$$a \in p(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})) = e^n_j(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})) = \varphi_{i_jm}(a_j)$$

avem $\widehat{a} = \widehat{\varphi_{i_jm}(a_j)} = \widehat{a_j}$, deci egalitatea din enunţ are loc în acest caz.

Pasul 2. Presupunem că afirmaţia a fost demonstrată pentru $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$ şi că $\mathbf{p} = f_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1})$. Atunci

$$\begin{aligned}\widehat{a} &\in p(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})\\ &= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})\\ &= f_\gamma(p_0(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}))\end{aligned}$$

dacă şi numai dacă există

$$\widehat{b_0} \in p_0(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}), \ldots, \widehat{b_{n_\gamma-1}} \in p_{n_\gamma-1}(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$$

astfel încât $\widehat{a} \in f_\gamma(\widehat{b_0}, \ldots, \widehat{b_{n_\gamma-1}})$. Deducem că există majorantele $m_0, \ldots, m_{n_\gamma-1} \in I$ pentru $\{i_0, \ldots, i_{n-1}\}$ şi că există $m \in I$ care este o majorantă pentru $\{m_0, \ldots, m_{n_\gamma-1}\}$, astfel ca

$$\begin{aligned} b_0 &\in p_0(\varphi_{i_0m_0}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m_0}(a_{n-1})),\\ &\vdots\\ b_{n_\gamma-1} &\in p_{n_\gamma-1}(\varphi_{i_0m_{n_\gamma-1}}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m_{n_\gamma-1}}(a_{n-1}))\end{aligned}$$

şi

$$a \in f_\gamma(\varphi_{m_0m}(b_0), \ldots, \varphi_{m_{n_\gamma-1}m}(b_{n_\gamma-1})).$$

Este clar că $i_0, \ldots, i_{n-1} \leq m$ şi conform Propoziţiei 1.4.9 avem

$$\begin{aligned}
a &\in f_\gamma(p_0(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1}))), \ldots, p_{n_\gamma-1}(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1}))) \\
&= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})) \\
&= p(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})).
\end{aligned}$$

Reciproc, dacă $m \in I$, $i_0, \ldots, i_{n-1} \leq m$ şi

$$\begin{aligned}
a &\in p(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1}))(\subseteq A_m) \\
&= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})) \\
&= f_\gamma(p_0(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})), \ldots, p_{n_\gamma-1}(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})))
\end{aligned}$$

atunci există

$$\begin{aligned}
b_0 &\in p_0(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})) \subseteq A_m, \\
&\vdots \\
b_{n_\gamma-1} &\in p_{n_\gamma-1}(\varphi_{i_0m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1}m}(a_{n-1})) \subseteq A_m
\end{aligned}$$

astfel încât

$$a \in f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1}) \subseteq A_m.$$

Rezultă că

$$\widehat{b_0} \in p_0(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}), \ldots, \widehat{b_{n_\gamma-1}} \in p_{n_\gamma-1}(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$$

şi

$$\widehat{a} \in f_\gamma(\widehat{b_0}, \ldots, \widehat{b_{n_\gamma-1}}).$$

Astfel,

$$\begin{aligned}
\widehat{a} \in f_\gamma(\widehat{b_0}, \ldots, \widehat{b_{n_\gamma-1}}) &\subseteq f_\gamma(p_0(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})) \\
&= f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) \\
&= p(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})
\end{aligned}$$

şi demonstraţia este completă. □

Propoziţia 2.3.14. *Fie* $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i,j \in I,\ i \leq j))$ *un sistem direct de multialgebre şi fie* $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$*. Dacă identitatea slabă* $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ *este satisfăcută pe fiecare multialgebră* $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ *atunci* $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ *este satisfăcută pe* $\mathfrak{A}_\infty$*.*

Demonstraţie. Fie $\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}} \in A_\infty$. Presupunem că $a_0 \in A_{i_0}$, ..., $a_{n-1} \in A_{i_{n-1}}$ ($i_0, \ldots, i_{n-1} \in I$) şi fie $m \in I$ astfel ca $i_0, \ldots, i_{n-1} \leq m$. Cum identitatea $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este satisfăcută în $\mathfrak{A}_m$, rezultă că există un element

$$a \in q(\varphi_{i_0 m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1} m}(a_{n-1})) \cap r(\varphi_{i_0 m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1} m}(a_{n-1}))$$

de unde deducem că

$$\widehat{a} \in q(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) \cap r(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$$

şi demonstraţia este încheiată. □

Corolarul 2.3.15. *Fie $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Dacă pentru un sistem direct $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i, j \in I,\ i \leq j))$ de multialgebre, orice elemente $i, j \in I$ au o majorantă $k \in I$ astfel încât $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este satisfăcută în $\mathfrak{A}_k$ atunci $\mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset$ este satisfăcută în $\mathfrak{A}_\infty$.*

Aceasta se obţine din propoziţia anterioară şi din Propoziţia 2.3.8 şi se justifică prin faptul că

$$J = \{k \in I \mid \mathbf{q} \cap \mathbf{r} \neq \emptyset \text{ este satisfăcută în } \mathfrak{A}_k\}$$

(cu restricţia relaţiei $\leq$ din I) este o mulţime ordonată dirijată superior cofinală în $(I, \leq)$.

Rezultate similare au loc pentru identităţi tari:

Propoziţia 2.3.16. *Fie $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i, j \in I,\ i \leq j))$ un sistem direct de multialgebre şi fie $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. Dacă identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută pe fiecare multialgebră $\mathfrak{A}_i$ ($i \in I$) atunci $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută în $\mathfrak{A}_\infty$.*

Demonstraţie. Fie $\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}} \in A_\infty$. Presupunem că $a_0 \in A_{i_0}$, ..., $a_{n-1} \in A_{i_{n-1}}$ ($i_0, \ldots, i_{n-1} \in I$). Considerăm un element arbitrar $\widehat{a} \in q(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$. Atunci există $m \in I$, $i_0, \ldots, i_{n-1} \leq m$ astfel ca $a \in q(\varphi_{i_0 m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1} m}(a_{n-1}))$. Cum identitatea $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ este satisfăcută în $\mathfrak{A}_m$, avem

$$q(\varphi_{i_0 m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1} m}(a_{n-1})) = r(\varphi_{i_0 m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1} m}(a_{n-1}))$$

aşadar $a \in r(\varphi_{i_0 m}(a_0), \ldots, \varphi_{i_{n-1} m}(a_{n-1}))$ şi, în consecinţă, $\widehat{a} \in r(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$. Astfel, am arătat că are loc incluziunea

$$q(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) \subseteq r(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}).$$

Analog se demonstrează că $r(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) \subseteq q(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$. □

Corolarul 2.3.17. *Fie* $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau)$. *Dacă pentru sistemul direct de multialgebre* $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i,j \in I,\ i \leq j))$ *orice elemente* $i, j \in I$ *au o majorantă* $k \in I$ *cu proprietatea că* $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ *este satisfăcută în* $\mathfrak{A}_k$ *atunci* $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ *este satisfăcută în* $\mathfrak{A}_\infty$.

Propoziţia 2.3.18. *Limita directă a unui sistem direct de multialgebre complete de acelaşi tip este o multialgebră completă.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i,j \in I,\ i \leq j))$ un sistem direct de multialgebre complete, fie $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{P}^{(n)}(\tau) \setminus \{\mathbf{x}_j \mid j \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ şi $\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}, \widehat{b_0}, \ldots, \widehat{b_{n-1}} \in A_\infty$. Putem considera că reprezentanţii $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}$ ai acestor clase din A_∞ sunt toţi din aceeaşi mulţime A_k, cu $k \in I$. Dacă

$$q(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) \cap r(\widehat{b_0}, \ldots, \widehat{b_{n-1}}) \neq \emptyset$$

atunci există un element $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ astfel încât

$$\widehat{a} \in q(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}}) \cap r(\widehat{b_0}, \ldots, \widehat{b_{n-1}}).$$

Din $\widehat{a} \in q(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$ rezultă că există $m' \in I$ cu $k \leq m'$ şi $a' \equiv a$ astfel încât

$$a' \in q(\varphi_{km'}(a_0), \ldots, \varphi_{km'}(a_{n-1})) \subseteq A_{m'}.$$

Analog, din $\widehat{a} \in r(\widehat{b_0}, \ldots, \widehat{b_{n-1}})$ rezultă că există $m'' \in I$ cu $k \leq m''$ şi $a'' \equiv a$ astfel încât

$$a'' \in r(\varphi_{km''}(b_0), \ldots, \varphi_{km''}(b_{n-1})) \subseteq A_{m''}.$$

Fie $\widehat{x} \in q(\widehat{a_0}, \ldots, \widehat{a_{n-1}})$ arbitrar. Atunci există $l \in I$ cu $k \leq l$ astfel încât

$$x \in q(\varphi_{kl}(a_0), \ldots, \varphi_{kl}(a_{n-1})) \subseteq A_l.$$

Din $a' \equiv a \equiv a''$ deducem că există un element $m''' \in I$ cu $m' \leq m'''$, $m'' \leq m'''$ cu proprietatea că $\varphi_{m'm'''}(a') = \varphi_{m''m'''}(a'')$. Cum $(I, \leq)$ este dirijată superior, există $m \in I$ cu $m''' \leq m$ şi $l \leq m$. Folosind Propoziţia 1.4.9 avem

$$\begin{aligned}
\varphi_{lm}(x) &\in \varphi_{lm}(q(\varphi_{kl}(a_0), \ldots, \varphi_{kl}(a_{n-1}))) \\
&\subseteq q(\varphi_{lm}(\varphi_{kl}(a_0)), \ldots, \varphi_{lm}(\varphi_{kl}(a_{n-1}))) \\
&= q(\varphi_{km}(a_0), \ldots, \varphi_{km}(a_{n-1})) \subseteq A_m.
\end{aligned}$$

De asemenea,

$$\begin{aligned}\varphi_{m'm}(a') &\in \varphi_{m'm}(q(\varphi_{km'}(a_0),\ldots,\varphi_{km'}(a_{n-1})))\\ &\subseteq q(\varphi_{m'm}(\varphi_{km'}(a_0)),\ldots,\varphi_{m'm}(\varphi_{km'}(a_{n-1})))\\ &= q(\varphi_{km}(a_0),\ldots,\varphi_{km}(a_{n-1}))\subseteq A_m\end{aligned}$$

şi, analog

$$\varphi_{m''m}(a'') \in r(\varphi_{km}(b_0),\ldots,\varphi_{km}(b_{n-1}))\subseteq A_m.$$

Dar

$$\varphi_{m'm}(a') = \varphi_{m'''m}(\varphi_{m'm'''}(a')) = \varphi_{m'''m}(\varphi_{m''m'''}(a'')) = \varphi_{m''m}(a''),$$

iar cum multialgebra $\mathfrak{A}_m$ este completă deducem că

$$\varphi_{lm}(x) \in q(\varphi_{km}(a_0),\ldots,\varphi_{km}(a_{n-1})) = r(\varphi_{km}(b_0),\ldots,\varphi_{km}(b_{n-1})).$$

În consecinţă, $\widehat{x} \in r(\widehat{b_0},\ldots,\widehat{b_{n-1}})$ şi astfel am demonstrat că

$$q(\widehat{a_0},\ldots,\widehat{a_{n-1}}) \subseteq r(\widehat{b_0},\ldots,\widehat{b_{n-1}}).$$

Analog se arată că $q(\widehat{a_0},\ldots,\widehat{a_{n-1}}) \supseteq r(\widehat{b_0},\ldots,\widehat{b_{n-1}})$, deci are loc egalitatea

$$q(\widehat{a_0},\ldots,\widehat{a_{n-1}}) = r(\widehat{b_0},\ldots,\widehat{b_{n-1}})$$

ceea ce completează justificarea faptului că multialgebra $\mathfrak{A}_\infty$ este completă. □

Ca şi Corolarul 2.3.15 se obţine:

Corolarul 2.3.19. *Fie $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i,j \in I,\ i \leq j))$ un sistem direct de multialgebre. Dacă orice elemente $i,j \in I$ au o majorantă $k \in I$ cu proprietatea că multialgebra $\mathfrak{A}_k$ este completă, atunci multialgebra $\mathfrak{A}_\infty$ este completă.*

Cazul hipergrupurilor

Să considerăm $(((H_i,\circ_i) \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i,j \in I,\ i \leq j))$ un sistem direct de semihipergrupuri şi să notăm $(H',\circ)$ limita directă a acestuia. Următorul rezultat se obţine folosind Propoziţia 2.3.16.

Teorema 2.3.20. *[70, Teorema 3] $(H',\circ)$ este un semihipergrup.*

Următoarea teoremă din [70] se obţine combinând teorema de mai sus cu Propoziţiile 2.3.8 şi 2.3.14:

Teorema 2.3.21. *[70, Teorema 4] Dacă pentru orice $i, j \in I$ există $k \in I$, $i \leq k$, $j \leq k$ astfel încât $(H_k, \circ_k)$ este un hipergrup atunci $(H', \circ)$ este un hipergrup.*

Într-adevăr, submulţimea $K = \{k \in I \mid H_k \text{ este hipergrup}\}$ este cofinală în I, deci semihipergrupul $(H', \circ)$ este izomorf cu limita directă $(H_\infty, \circ)$ a sistemului direct $((H_k, \circ_k) \mid k \in K)$. Fiecare hipergrup H_k poate fi privit ca o multialgebră $(H_k, \circ_k, /_k, \backslash_k)$ de tip $(2, 2, 2)$, cu mulţimea suport nevidă, pentru care $(H_k, \circ_k)$ este semihipergrup şi în care multioperaţiile $/_k, \backslash_k$ se obţin din $\circ_k$ prin egalităţile (1.1.2). Aceste multialgebre verifică identităţile (1.5.2) (şi (1.5.3)) deci şi limita directă $(H_\infty, \circ, /, \backslash)$ verifică, pe lângă (1.5.1), identităţile (1.5.2). Rezultă că $(H_\infty, \circ)$ (deci şi $(H', \circ)$) este un hipergrup (vezi Observaţia 1.5.3).

Observaţia 2.3.22. În multialgebra $(H_\infty, \circ, /, \backslash)$ de mai sus, multioperaţiile $\circ, /, \backslash$ din se obţin din $\circ$ cu ajutorul egalităţilor (1.1.2).

Pentru aceasta verificăm că dacă $a \in H_{k_1}$, $b \in H_{k_2}$ $(k_1, k_2 \in K)$ atunci

$$\{\widehat{x} \in H_\infty \mid \widehat{a} \in \widehat{b} \circ \widehat{x}\} = \{\widehat{x} \mid \exists k \in K,\ k_1 \leq k,\ k_2 \leq k,\ x \in \varphi_{k_1 k}(a)/_k \varphi_{k_2 k}(b)\} \text{ şi}$$
$$\{\widehat{x} \in H_\infty \mid \widehat{a} \in \widehat{x} \circ \widehat{b}\} = \{\widehat{x} \mid \exists k \in K,\ k_1 \leq k,\ k_2 \leq k,\ x \in \varphi_{k_2 k}(b) \backslash_k \varphi_{k_1 k}(a)\}.$$

Într-adevăr, dacă $x \in H_{k_0}$ $(k_0 \in K)$ şi $\widehat{a} \in \widehat{b} \circ \widehat{x}$ atunci există o majorantă $k' \in K$ pentru k_0 şi k_2 şi un element $a' \in H_{k'}$ astfel încât $a' \equiv a$ şi $a' \in \varphi_{k_2 k'}(b) \circ_{k'} \varphi_{k_0 k'}(x)$. Din $a' \equiv a$ deducem că există $k \in K$, $k', k_1 \leq k$ pentru care $\varphi_{k' k}(a') = \varphi_{k_1 k}(a)$. Rezultă că

$$\begin{aligned}\varphi_{k_1 k}(a) = \varphi_{k' k}(a') \in \varphi_{k' k}(\varphi_{k_2 k'}(b) \circ_{k'} \varphi_{k_0 k'}(x)) \subseteq \varphi_{k' k}(\varphi_{k_2 k'}(b)) \circ_k \varphi_{k' k}(\varphi_{k_0 k'}(x))\\ = \varphi_{k_2 k}(b) \circ_k \varphi_{k_0 k}(x).\end{aligned}$$

Aşadar, $\varphi_{k_0 k}(x) \in \varphi_{k_1 k}(a)/_k \varphi_{k_2 k}(b)$ şi, cum $x \equiv \varphi_{k_0 k}(x)$, obţinem

$$\{\widehat{x} \in H_\infty \mid \widehat{a} \in \widehat{b} \circ \widehat{x}\} \subseteq \{\widehat{x} \mid \exists k \in K,\ k_1 \leq k,\ k_2 \leq k,\ x \in \varphi_{k_1 k}(a)/_k \varphi_{k_2 k}(b)\}.$$

Reciproc, fie $k \in K$, $k_1 \leq k$, $k_2 \leq k$ şi fie $x \in \varphi_{k_1 k}(a)/_k \varphi_{k_2 k}(b)$. Atunci $\varphi_{k_1 k}(a) \in \varphi_{k_2 k}(b) \circ_k x$ şi, în consecinţă, $\widehat{a} = \widehat{\varphi_{k_1 k}(a)} \in \widehat{\varphi_{k_2 k}(b)} \circ \widehat{x} = \widehat{b} \circ \widehat{x}$.

Inima ω_H a *unui hipergrup* $(H, \cdot)$ este mulţimea tuturor elementelor $x \in H$ pentru care clasa $\overline{x}$ din grupul fundamental $(\overline{H}, \cdot)$ este elementul unitate din $\overline{H}$. În [40] este prezentată o condiţie necesară şi suficientă pentru ca limita directă a unui sistem direct particular de hipergrupuri să aibă o inimă care poate fi exprimată ca un hiperprodus. Folosind rezultatele stabilite anterior în acest paragraf putem privi această teoremă dintr-o altă perspectivă.

Teorema 2.3.23. *[40, Teorema 10] Fie* $((H_i, \circ_i) \mid i \in I)$ *un sistem direct de semihipergrupuri astfel încât următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

1) pentru orice $i, j \in I$ *există* $k \in I$, $i \leq k$, $j \leq k$ *astfel încât* H_k *este un hipergrup;*

2) $K = \{k \in I \mid H_k$ *este hipergrup*$\}$ *are proprietatea că* $|K| < \aleph_0$.

Dacă $s = \max\{k \mid k \in K\}$ *atunci există* $\widehat{a_j} \in H'$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$ *astfel încât* $\omega_{H'} = \widehat{a_1} \circ \cdots \circ \widehat{a_n}$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *există* $a_{s,j} \in \widehat{a_j}$ *astfel ca* $\omega_{H_s} = a_{s,1} \circ \cdots \circ a_{s,n}$.

Aceasta se obţine din rezultatele prezentate în acest paragraf astfel: sistemul direct care face obiectul acestei teoreme este un sistem direct de semihipergrupuri cu proprietatea că orice $i, j \in I$ au o majorantă $k \in I$ astfel ca H_k să fie hipergrup, de unde, folosind Propoziţia 2.3.8 ca în demonstraţia Corolarului 2.3.15 deducem că este destul să lucrăm doar cu submulţimea K a lui I şi cu sistemul direct de hipergrupuri corespunzător lui K. Cum condiţia impusă lui K de a fi finită, face ca $(\{s\}, \leq)$ să fie cofinală în K rezultă că hipergrupul H' este izomorf cu H_s (din nou Propoziţia 2.3.8). Ca urmare, inima hipergrupului H' poate fi scrisă ca un hiperprodus dacă şi numai dacă inima lui H_s poate fi scrisă ca un hiperprodus. Izomorfismul din demonstraţia aceleiaşi Propoziţii 2.3.8 ne conduce la concluzia dorită.

Cazul SHR-semigrupurilor

Un semigrup $(S, \cdot)$ se numeşte SHR*-semigrup* (respectiv SR*-semigrup*) dacă putem îmbogăţi mulţimea S cu un element 0 cu proprietatea că $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ pentru orice $x \in S$ (dacă nu cumva un astfel de element există deja în S) şi putem defini o multioperaţie (respectiv o operaţie) $+$ pe $S^0 = S \cup \{0\}$ astfel ca $(S^0, +, \cdot, 0)$ să fie un hiperinel Krasner (respectiv un inel) cu elementul nul 0 (vezi [46]).

Unul din rezultatele principale din [46] este:

Teorema 2.3.24. *[46, Teorema 3] Fie* $(((H_i, \circ_i) \mid i \in I), (f_{ij} \mid i, j \in I,\ i \leq j))$ *un sistem direct de semigrupuri astfel încât pentru orice* $i \in I$ *există* $k \in I$, $i \leq k$ *pentru care*

$(H_k, \circ_k)$ este un SHR-semigrup. Fie $K = \{k \in I \mid (H_k, \circ_k)$ este un $SHR-semigrup\}$. Astfel, pentru fiecare $k \in K$, există o multioperaţie $\oplus_k$ pe H_k^0 astfel ca $(H_k^0, \oplus_k, \circ_k, 0_k)$ să fie hiperinel Krasner. Dacă pentru orice $k, l \in K$, $k \leq l$, f_{kl} este un omomorfism de hiperinele Krasner, atunci limita directă a sistemului direct de semihipergrupuri $((H_i, \circ_i) \mid i \in I)$ este un SHR-semigrup.

Identificăm din nou, ca în Observaţia 1.5.3, un hipergrup cu o multialgebră cu trei multioperaţii binare, $\circ, /, \backslash$, cu mulţimea suport nevidă, care verifică identitatea (1.5.1) şi egalităţile (1.1.2). Din ipoteză se deduce că mulţimea K este cofinală în I, deci limita sistemului direct $((H_i, \circ_i) \mid i \in I)$ este izomorfă cu limita $(H_\infty, \circ)$ a sistemului direct $((H_k, \circ_k) \mid k \in K)$ (Propoziţia 2.3.8). Din ipoteză deducem că fiecare H_k poate fi înzestrat cu o structură de multialgebră $(H_k, \oplus_k, /_k, \backslash_k, 0_k, -_k, \circ_k)$ cu proprietatea că $(H_k, \oplus_k, /_k, \backslash_k)$ este un hipergrup şi care verifică identităţile din Exemplele 1.5.5 şi 1.5.6. Aplicând Observaţiile 2.3.5, 2.3.22 şi Propoziţia 2.3.16 rezultă că H_∞ poate fi înzestrat cu o structură de multialgebră $(H, \oplus, /, \backslash, 0, -, \circ)$ care verifică aceleaşi proprietăţi, deci este un SHR-semigrup. Un rezultat similar se menţine şi pentru SR-semigrupuri ([46, Observaţia 4]).

Asupra unei subcategorii de multialgebre

Proprietăţile prezentate în prima parte a acestui paragraf rămân valabile pentru subcategoria categoriei $\mathbf{Malg}(\tau)$ obţinută considerând ca morfisme omomorfismele ideale. Cu alte cuvinte, rezultatele stabilite aici se menţin dacă înlocuim conceptul de ,,omomorfism” cu cel de ,,omomorfism ideal”. După cum vom vedea, în acest caz definiţia multioperaţiilor din multialgebra limită directă va fi mai simplă.

Să considerăm un sistem direct de multialgebre $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i, j \in I,\ i \leq j))$ având toate omomorfismele ideale. Fie A_∞ limita directă a sistemului direct de mulţimi $((A_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i, j \in I,\ i \leq j))$. Definirea multioperaţiilor pe A_∞ se poate face astfel: pentru fiecare $\gamma < o(\tau)$ şi pentru orice elemente $\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}} \in A_\infty$ cu $x_0 \in A_{i_0}, \ldots, x_{n_\gamma-1} \in A_{i_{n_\gamma-1}}$ considerăm un element $m \in I$, $i_0, \ldots, i_{n_\gamma-1} \leq m$ şi punem

$$f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}}) = \{\widehat{x} \mid x \in f_\gamma(\varphi_{i_0m}(x_0), \ldots, \varphi_{i_{n_\gamma-1}m}(x_{n_\gamma-1}))\}. \tag{2.3.1}$$

Observaţia 2.3.25. Această definiţie nu depinde de alegerea elementului $m \in I$. Mai mult, multioperaţiile astfel introduse sunt aceleaşi cu cele definite în Lema 2.3.4.

Aceasta are loc deoarece luând un alt $m' \in I$, cu $i_j \le m'$ pentru toţi $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$, şi $x'_j = \varphi_{i_j m}(x_j)$, $x''_j = \varphi_{i_j m'}(x_j)$ avem

$$\{\widehat{x'} \mid x' \in f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma - 1})\} = \{\widehat{x''} \mid x'' \in f_\gamma(x''_0, \ldots, x''_{n_\gamma - 1})\}.$$

Într-adevăr, fie $q \in I$ astfel ca $m \le q$, $m' \le q$. Atunci

$$\begin{aligned}
\varphi_{mq}(f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})) &= f_\gamma(\varphi_{mq}(x'_0), \ldots, \varphi_{mq}(x'_{n_\gamma-1})) \\
&= f_\gamma(\varphi_{i_0 q}(x_0), \ldots, \varphi_{i_{n_\gamma-1} q}(x_{n_\gamma-1})) \\
&= f_\gamma(\varphi_{m' q}(x''_0), \ldots, \varphi_{m' q}(x''_{n_\gamma-1})) \\
&= \varphi_{m' q}(f_\gamma(x''_0, \ldots, x''_{n_\gamma-1}));
\end{aligned}$$

deci pentru fiecare $x' \in f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})$ există $x'' \in f_\gamma(x''_0, \ldots, x''_{n_\gamma-1})$ astfel încât $x' \equiv x''$ şi pentru fiecare $x'' \in f_\gamma(x''_0, \ldots, x''_{n_\gamma-1})$ există $x' \in f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})$ astfel încât $x' \equiv x''$.

Observaţia 2.3.26. În cazul nostru, Observaţia 2.3.5 rezultă imediat din egalitatea (2.3.1).

Observaţia 2.3.27. Este clar că pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice $x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1} \in A_i$ avem

$$\begin{aligned}
\varphi_{i\infty}(f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1})) &= \{\varphi_{i\infty}(x) \mid x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1})\} \\
&= \{\widehat{x} \mid x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma-1})\} \\
&= f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}}) = f_\gamma(\varphi_{i\infty}(x_0), \ldots, \varphi_{i\infty}(x_{n_\gamma-1})),
\end{aligned}$$

deci omomorfismele $\varphi_{i\infty} : A_i \to A_\infty$, $\varphi_{i\infty}(x) = \widehat{x}$ sunt ideale.

Observaţia 2.3.28. Omomorfismul μ din Teorema 2.3.7 este ideal dacă toate omomorfismele care intervin sunt ideale.

Fie $\gamma < o(\tau)$, $\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}} \in A_\infty$ cu $x_0 \in A_{i_0}, \ldots, x_{n_\gamma-1} \in A_{i_{n_\gamma-1}}$ şi fie $m \in I$ şi $x'_0 = \varphi_{i_0 m}(x_0), \ldots, x'_{n_\gamma-1} = \varphi_{i_{n_\gamma-1}}(x_{n_\gamma-1})$; avem

$$\begin{aligned}
\mu(f_\gamma(\widehat{x_0}, \ldots, \widehat{x_{n_\gamma-1}})) &= \{\mu(x') \mid x' \in f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})(\subseteq A_m)\} \\
&= \{\alpha_m(x') \mid x' \in f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})(\subseteq A_m)\} \\
&= \alpha_m(f_\gamma(x'_0, \ldots, x'_{n_\gamma-1})) = f_\gamma(\alpha_m(x'_0), \ldots, \alpha_m(x'_{n_\gamma-1})) \\
&= f_\gamma(\mu(\widehat{x'_0}), \ldots, \mu(\widehat{x'_{n_\gamma-1}})) = f_\gamma(\mu(\widehat{x_0}), \ldots, \mu(\widehat{x_{n_\gamma-1}}))
\end{aligned}$$

deci, Teorema 2.3.7 poate fi formulată în acelaşi fel în această subcategorie a categoriei $\mathbf{Malg}(\tau)$.

Observaţia 2.3.29. Remarcăm că demonstraţia Propoziţiei 2.3.8 arată că propoziţia rămâne valabilă şi dacă toate omomorfismele care intervin sunt ideale.

Observaţia 2.3.30. Şi Teorema 2.3.10 rămâne valabilă dacă verificăm că ψ_{pq} este un omomorfism ideal. Fie $\gamma < o(\tau),\ p, q \in P,\ p \leq q$ şi $(\widehat{x_j})_{I_p} \in A_{\infty}^{p},\ j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$. Putem considera că $x_j \in A_m$ cu $m \in I_p$, pentru toţi $j \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}$ şi atunci,

$$\begin{aligned}
\psi_{pq}(f_\gamma((\widehat{x_0})_{I_p}, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_p})) &= \{\psi_{pq}(\widehat{x}_{I_p}) \mid x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1})\} \\
&= \{\widehat{x}_{I_q} \mid x \in f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1})\} \\
&= f_\gamma((\widehat{x_0})_{I_q}, \ldots, (\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_q}) \\
&= f_\gamma(\psi_{pq}((\widehat{x_0})_{I_p}), \ldots, \psi_{pq}((\widehat{x_{n_\gamma - 1}})_{I_p})).
\end{aligned}$$

Observaţia 2.3.31. Şi Teorema 2.3.12 are loc în acest caz.

Observaţia 2.3.32. Cum omomorfismele de algebre universale sunt omomorfisme ideale, definiţia operaţiilor din limita directă a unui sistem direct de algebre universale este (2.3.1). Se deduce că limita directă a unui sistem direct de multialgebre generalizează construcţia omonimă de la algebre universale şi se constată că, în cazul algebrelor universale rezultatele din acest paragraf ne conduc la cele din [29, §21]. Se observă şi faptul că rezultatele de aici pot fi formulate pentru semihipergrupuri şi hipergrupuri luând ca omomorfisme, omomorfismele bune, respectiv cele foarte bune.

2.4 Algebra fundamentală a limitei directe a unui sistem direct de multialgebre

Cum factorizarea după relaţia fundamentală determină un functor F (vezi Observaţia 1.6.21), pornind de la un sistem direct de multialgebre, familia algebrelor lor fundamentale, cu familia corespunzătoare de omomorfisme, formează un sistem direct de algebre universale. Scopul nostru, în acest paragraf, este să stabilim dacă algebra fundamentală a unei limite directe a unui sistem direct de multialgebre este limita directă a sistemului direct de algebre fundamentale rezultate.

Teorema 2.4.1. *Functorul F : $\mathbf{Malg}(\tau) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\tau)$ este un adjunct la stânga pentru functorul de incluziune U : $\mathbf{Alg}(\tau) \longrightarrow \mathbf{Malg}(\tau)$.*

Demonstraţie. Izomorfismul natural ψ ce se stabileşte între bifunctorii $H_{\mathbf{Alg}(\tau)}(F(-),\ -)$ şi $H_{\mathbf{Malg}(\tau)}(-,\ U(-))$ este definit astfel: pentru orice multialgebră $\mathfrak{A}$ de tip τ şi pentru orice algebră universală $\mathfrak{B}$ de acelaşi tip τ,

$$\psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} : H_{\mathbf{Alg}(\tau)}(\overline{\mathfrak{A}},\ \mathfrak{B}) \to H_{\mathbf{Malg}(\tau)}(\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}),\ \psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}(h) = h \circ \varphi_A.$$

Aplicaţia $\psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ este bijectivă şi diagrama următoare este comutativă pentru orice morfisme $f : A \to A'$ şi $g : B \to B'$ din $\mathbf{Malg}(\tau)$, respectiv din $\mathbf{Alg}(\tau)$:

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathbf{Alg}(\tau)}(\overline{\mathfrak{A}'},\ \mathfrak{B}) & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{A}',\mathfrak{B}}} & H_{\mathbf{Malg}(\tau)}(\mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H_{\mathbf{Alg}(\tau)}(\overline{f},\ g)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H_{\mathbf{Malg}(\tau)}(f,\ g)} \\ H_{\mathbf{Alg}(\tau)}(\overline{\mathfrak{A}},\ \mathfrak{B}') & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}'}} & H_{\mathbf{Malg}(\tau)}(\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}') \end{array} \quad . \tag{2.4.1}$$

Dacă $h : \overline{A'} \to B$ este un omomorfism de algebre universale, atunci

$$H_{\mathbf{Malg}(\tau)}(f,\ g)(\psi_{\mathfrak{A}',\mathfrak{B}}(h)) = H_{\mathbf{Malg}(\tau)}(f,\ g)(h \circ \varphi_{A'}) = g \circ h \circ \varphi_{A'} \circ f$$

şi

$$\psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}'}(H_{\mathbf{Alg}(\tau)}(\overline{f},\ g)(h)) = \psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}'}(g \circ h \circ \overline{f}) = g \circ h \circ \overline{f} \circ \varphi_A.$$

Dar, aplicând Teorema 1.6.18 pentru $f : A \to A'$, avem

$$\overline{f} \circ \varphi_A = \varphi_{A'} \circ f,$$

deci diagrama (2.4.1) este comutativă, ceea ce finalizează demonstraţia teoremei. $\square$

Este cunoscut faptul că un functor care are adjunct la dreapta comută cu limitele directe. Prin urmare:

Corolarul 2.4.2. *Fie $(I, \leq)$ o mulţime preordonată dirijată superior. Dacă*

$$\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_{ij} \mid i, j \in I,\ i \leq j))$$

este un sistem direct de multialgebre de tip τ având ca limită directă multialgebra $\mathfrak{A}_\infty$, atunci algebrele universale $(\overline{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I)$ şi omomorfismele $(\overline{\varphi_{ij}} \mid i, j \in I,\ i \leq j)$ formează un sistem direct $\overline{\mathcal{A}}$ de algebre universale de tip τ şi algebra limită directă a sistemului direct $\overline{\mathcal{A}}$ este izomorfă cu algebra $\overline{\mathfrak{A}_\infty}$.

Observaţia 2.4.3. Cu notaţiile folosite anterior, aplicând Teorema 2.3.7 obţinem ca izomorfism între $\underrightarrow{\lim}\overline{\mathcal{A}}$ şi $\overline{\underrightarrow{\lim}\mathcal{A}}$ aplicaţia μ dată de corespondenţa $\mu(\widehat{\alpha^*_{\mathfrak{A}_i}\langle a\rangle}) = \alpha^*_{\mathfrak{A}_\infty}\langle\widehat{a}\rangle$, (unde $a \in A_i$, $i \in I$).

Observaţia 2.4.4. Să considerăm un sistem direct de semihipergrupuri $(H_i \mid i \in I)$, să considerăm că pentru fiecare H_i relaţia fundamentală este $\beta^*_{H_i}$ şi să notăm cu H' limita directă a acestui sistem şi cu $\beta_{H'}$ relaţia sa fundamentală. În [70, Teorema 5] se afirmă că *dacă* $x, y \in H_i$, $x\beta^*_{H_i}y$ *atunci* $\widehat{x}\beta_{H'}\widehat{y}$, şi că *dacă* $x, y \in H'$, $\widehat{x}\beta^*_{H'}\widehat{y}$ *atunci există* $i \in I$, $x_i \in \widehat{x} \cap H_i$, $y_i \in \widehat{y} \cap H_i$ *astfel încât* $x_i\beta^*_{H_i}y_i$. Este clar că aceste afirmaţii se deduc şi din buna definire şi injectivitatea funcţiei μ din Observaţia 2.4.3.

2.5 Asupra limitei inverse a unui sistem invers de multialgebre

Amintim că un *sistem invers de mulţimi* constă dintr-o mulţime preordonată dirijată superior $(I, \leq)$, o familie de mulţimi $(A_i \mid i \in I)$ şi o familie de aplicaţii $(\varphi^k_j : A_j \to A_k \mid j, k \in I,\ j \leq k)$ cu proprietatea că $\varphi^i_i = 1_{A_i}$ pentru orice $i \in I$, iar dacă $j \leq k \leq l$, avem $\varphi^k_j \circ \varphi^l_k = \varphi^l_j$. Să considerăm, de asemenea, că fiecare mulţime A_i din familia inversă de mai sus este mulţime suport pentru o multialgebră $\mathcal{A}_i$ de tip τ şi că aplicaţiile φ^k_j $(j, k \in I,\ j \leq k)$ sunt omomorfisme. În aceste condiţii se obţine un *sistem invers de multialgebre*

$$\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi^k_j : A_j \to A_k \mid j, k \in I,\ j \leq k)).$$

Dacă $(I, \leq)$ este o mulţime bine ordonată atunci ne vom referi la $\mathcal{A}$ ca fiind un *sistem invers bine ordonat de multialgebre.*

Amintim că *limita inversă a sistemului invers de mulţimi* $((A_i \mid i \in I), (\varphi^k_j : A_j \to A_k \mid j, k \in I,\ j \leq k))$ este mulţimea

$$A^\infty = \{(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid \forall j, k \in I,\ j \leq k,\ \varphi^k_j(a_k) = a_j\},$$

împreună cu restricţiile proiecţiilor canonice ale produsului $\prod_{i \in I} A_i$ la A^∞,

$$\varphi^\infty_j : A^\infty \to A_j,\ \varphi^\infty_j((a_i)_{i \in I}) = a_j.$$

De asemenea, reamintim că limita inversă a unui sistem invers de mulţimi nevide poate fi vidă. Un exemplu în acest sens poate fi găsit în [29, p.132]. Aceasta nu se întâmplă, însă, dacă mulţimile sunt finite.

Teorema 2.5.1. *[29, §21, Teorema 1] Limita inversă a unui sistem invers de mulţimi nevide finite este nevidă.*

Observaţia 2.5.2. Dacă $\mathcal{I}$ este categoria asociată mulţimii preordonate $(I, \leq)$, putem privi (ca în [68]) sistemul invers de mulţimi $((A_i \mid i \in I), (\varphi_k^j \mid j, k \in I,\ j \geq k))$ ca pe un functor contravariant de la categoria $\mathcal{I}$ la categoria **Ens** a mulţimilor. Mulţimea A^∞, împreună cu aplicaţiile φ_j^∞, $j \in I$, este limita inversă a acestui functor. Notăm că pentru orice $j, k \in I$, cu $j \leq k$, avem $\varphi_j^k \circ \varphi_k^\infty = \varphi_j^\infty$.

În [29, p.225] este menţionat faptul că limita inversă a unui sistem invers de sisteme relaţionale este definită ca pentru algebre, ca o substructură corespunzătoare a produsului direct. Cum fiecare multioperaţie n_γ-ară dintr-o multialgebră poate fi văzută ca o relaţie $n_\gamma + 1$-ară r_γ ca în (1.1.3), deducem că $\mathbf{Malg}(\tau)$ este o subcategorie a categoriei sistemelor relaţionale de tip $\tau' = (n_\gamma + 1)_{\gamma < o(\tau)}$. Vom vedea în continuare că această subcategorie nu este închisă la limite inverse de sisteme inverse şi vom studia în ce condiţii limita inversă a unui sistem invers de multialgebre de tip τ (în categoria sistemelor relaţionale de tip τ') este un obiect din $\mathbf{Malg}(\tau)$.

Utilizând (1.1.3), să privim fiecare multialgebră $\mathfrak{A}_i$ din sistemul invers $\mathcal{A}$ ca pe un sistem relaţional. Definiţia relaţiilor din limita inversă a sistemului invers de sisteme relaţionale $((A_i, (r_\gamma)_{\gamma < o(\tau)}) \mid i \in I)$ este următoarea: oricare ar fi $\gamma < o(\tau)$ şi oricare ar fi $(a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma - 1})_{i \in I}, (a_i)_{i \in I} \in A^\infty$,

$$((a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma - 1})_{i \in I}, (a_i)_{i \in I}) \in r_\gamma \Leftrightarrow a_i \in f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma - 1}),\ \forall i \in I.$$

Dacă sistemul relaţional obţinut astfel ar fi o multialgebră atunci, folosind din nou (1.1.3), ar rezulta că multioperaţiile sale ar fi definite astfel: oricare ar fi $\gamma < o(\tau)$ şi oricare ar fi $(a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma - 1})_{i \in I} \in A^\infty$,

$$f_\gamma((a_i^0)_{i \in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma - 1})_{i \in I}) = \prod_{i \in I} f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma - 1}) \cap A^\infty. \tag{2.5.1}$$

Observaţia 2.5.3. Să remarcăm că limita inversă A^∞ a sistemului invers de mulţimi

$$((A_i \mid i \in I), (\varphi_j^k : A_j \to A_k \mid j, k \in I,\ j \leq k))$$

nu este, în general, o submultialgebră pentru $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$, deci intersecţia cu A^∞ nu poate fi omisă în (2.5.1).

Exemplul 2.5.4. Considerăm mulţimea finită de numere naturale $I=\{1,2\}$ ordonată cu relaţia de ordine $\leq$, indusă de ordonarea uzuală din $\mathbb{N}$. De asemenea, considerăm sistemul invers ce constă din hipergrupoizii $(H_1,\circ),\ (H_2,\circ)$ definiţi pe $H_1=H_2=\{x,y\}$ prin

$$x\circ x=x\circ y=y\circ x=y\circ y=\{x,y\}$$

şi din omomorfismele (ideale) $\varphi_1^1=1_{H_1},\ \varphi_2^2=1_{H_2}$ şi

$$\varphi_1^2:H_2\to H_1,\ \varphi_1^2(x)=y,\ \varphi_1^2(y)=x.$$

Atunci $H^\infty=\{(x,y),(y,x)\}$ nu este un subhipergrupoid în $H_1\times H_2$.

Observaţia 2.5.5. Corespondenţele f_γ date de (2.5.1) nu sunt întotdeauna multioperaţii pe A^∞. Chiar dacă $A^\infty\neq\emptyset$, intersecţia din membrul secund al egalităţii poate fi vidă. De fapt, cum pentru orice $\gamma<o(\tau),\ (a_i^0)_{i\in I},\dots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}\in A^\infty$ şi orice $j,k\in I,\ j\leq k$,

$$\varphi_j^k(f_\gamma(a_k^0,\dots,a_k^{n_\gamma-1}))\subseteq f_\gamma(a_j^0,\dots,a_j^{n_\gamma-1}),$$

deducem că pentru un $\gamma<o(\tau)$ şi $(a_i^0)_{i\in I},\dots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}\in A^\infty$ arbitrar fixate, familia

$$(f_\gamma(a_i^0,\dots,a_i^{n_\gamma-1})\mid i\in I)$$

de mulţimi împreună cu restricţiile aplicaţiilor φ_k^j la aceste mulţimi formează un sistem invers de mulţimi şi mulţimea din membrul stâng din (2.5.1) este limita inversă a acestui sistem invers de mulţimi. Aşadar, $f_\gamma((a_i^0)_{i\in I},\dots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I})$ poate fi vidă chiar dacă A^∞ nu este.

Exemplul 2.5.6. În [35], G. Higman şi A. H. Stone prezintă un exemplu de sistem invers de mulţimi (numărabile), cu aplicaţii surjective şi limită inversă vidă: fie ω_1 primul ordinal nenumărabil, fie, pentru $\alpha<\omega_1$,

$$E_\alpha=\{\gamma\mid\gamma\leq\alpha\},\ F_\alpha=\{f\in\mathbb{R}^{E_\alpha}\mid f\text{ este strict crescătoare}\};$$

şi fie, pentru $\alpha<\beta<\omega_1$,

$$\theta_\alpha^\beta:F_\beta\to F_\alpha,\ \theta_\alpha^\beta(f)=f|_{E_\alpha}\ (\text{restricţia lui } f \text{ la } E_\alpha).$$

Higman şi Stone definesc prin inducţie transfinită o familie de submulţimi S_α ale mulţimilor F_α astfel încât

$$|S_\alpha| = \aleph_0 \text{ şi } \theta_\alpha^\beta(S_\beta) = S_\alpha \text{ pentru orice } \alpha < \beta,$$

cu proprietatea că sistemul invers format din familia $(S_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$ şi restricţiile corespunzătoare ale funcţiilor θ_α^β are limita vidă. Se deduce imediat că familia de mulţimi $(S_\alpha \mid 1 \leq \alpha < \omega_1)$, împreună cu restricţiile corespunzătoare ale funcţiilor θ_α^β, formează un sistem invers cu limita inversă vidă.

Pornind de la acest exemplu, vom considera pentru fiecare $1 \leq \alpha < \omega_1$,

$$A_\alpha = S_\alpha \cup \{0_{E_\alpha}\}, \text{ unde } 0_{E_\alpha} : E_\alpha \to \mathbb{R},\ 0_{E_\alpha}(\gamma) = 0.$$

Definim un hiperprodus $\circ$ pe A_α luând

$$f \circ g = \begin{cases} S_\alpha, & \text{dacă } f = 0_{E_\alpha} = g \text{ sau } f \neq 0_{E_\alpha} \neq g \\ \{0_{E_\alpha}\}, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Aplicaţiile

$$\varphi_\alpha^\beta : A_\beta \to A_\alpha,\ \varphi_\alpha^\beta(f) = f|_{E_\alpha}\ (\alpha < \beta)$$

sunt omomorfisme (ideale). Astfel obţinem un sistem invers de hipergrupoizi.

Observăm că $\varphi_\alpha^\beta|_{S_\alpha} = \theta_\alpha^\beta|_{S_\alpha}$ şi că A^∞ nu e vidă deoarece $(0_{E_\alpha})_{1\leq\alpha<\omega_1} \in A^\infty$. De fapt, $A^\infty = \{(0_{E_\alpha})_{1\leq\alpha<\omega_1}\}$, pentru că dacă A^∞ ar avea un element diferit de acesta, ar rezulta că acest element aparţine limitei inverse a sistemului invers de mulţimi $(S_\alpha \mid 1 \leq \alpha < \omega_1)$, ceea ce e imposibil.

Acum e uşor de observat că (2.5.1) nu defineşte întotdeauna hiperprodus pe A^∞ deoarece

$$(0_{E_\alpha})_{1\leq\alpha<\omega_1} \circ (0_{E_\alpha})_{1\leq\alpha<\omega_1} = \emptyset.$$

Observaţia 2.5.7. Dacă $A^\infty \neq \emptyset$ atunci egalităţile (2.5.1) definesc o multialgebră $\mathfrak{A}^\infty = (A^\infty, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ dacă şi numai dacă pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice $(a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I} \in A^\infty$ avem

$$f_\gamma((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}) = \varprojlim_{i\in I} f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma-1}) \neq \emptyset.$$

După cum rezultă din Teorema 2.5.1, un caz în care aceasta se întâmplă este dat de condiţia ca pentru orice $i \in I$, $\gamma < o(\tau)$ şi $a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma-1} \in A_i$, mulţimea $f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma-1}) \neq \emptyset$ să fie finită.

Observaţia 2.5.8. Cum $|f_\gamma(a_i^0,\ldots,a_i^{n_\gamma-1})| = 1$ pentru orice algebră universală de suport nevid, deducem că algebrele universale satisfac condiţiile de mai sus. Cu alte cuvinte, $\mathbf{Alg}(\tau)$ este o subcategorie închisă la limite inverse de sisteme inverse a categoriei sistemelor relaţionale (de tip τ').

Remarcăm, de asemenea, că dacă pentru un $\gamma < o(\tau)$, f_γ este o operaţie în toate multialgebrele $\mathfrak{A}_i$ atunci f_γ este o operaţie pe A^∞. În această situaţie, f_γ se defineşte prin

$$f_\gamma((a_i^0)_{i\in I},\ldots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}) = (f_\gamma(a_i^0,\ldots,a_i^{n_\gamma-1}))_{i\in I},$$

pentru orice elemente $(a_i^0)_{i\in I},\ldots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}$ din A^∞, adică la fel ca pentru algebre universale (vezi [29, §21]).

Observaţia 2.5.9. Dacă $\mathfrak{A}^\infty = (A^\infty,(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ este o multialgebră, atunci pentru orice $j\in I$, aplicaţia φ_j^∞ este un omomorfism de multialgebre.

Într-adevăr, cum φ_j^∞ este restricţia aplicaţiei e_j^I la A^∞, dacă luăm $\gamma < o(\tau)$ şi elementele $(a_i^0)_{i\in I},\ldots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I}\in A^\infty$ avem

$$\begin{aligned}
\varphi_j^\infty(f_\gamma((a_i^0)_{i\in I},\ldots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I})) &= \varphi_j^\infty\left(\prod_{i\in I} f_\gamma(a_i^0,\ldots,a_i^{n_\gamma-1})\cap A^\infty\right)\\
&\subseteq e_j^I\left(\prod_{i\in I} f_\gamma(a_i^0,\ldots,a_i^{n_\gamma-1})\right)\\
&= f_\gamma(a_j^0,\ldots,a_j^{n_\gamma-1})\\
&= f_\gamma(\varphi_j^\infty((a_i^0)_{i\in I}),\ldots,\varphi_j^\infty((a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I})).
\end{aligned}$$

Observaţia 2.5.10. După cum uşor reiese din Exemplul 2.5.6, problemele care apar când cerem limitei inverse a unui sistem invers de multialgebre să fie o multialgebră nu se rezolvă dacă lucrăm cu omomorfisme ideale. Mai mult, în această situaţie apar probleme noi datorate faptului că omomorfismele φ_j^∞ $(j\in I)$ nu sunt întotdeauna ideale.

Pentru a ilustra aceasta, construim un exemplu bazat tot pe exemplul lui Higman şi Stone de la care am pornit în Exemplul 2.5.6.

Exemplul 2.5.11. Luăm mulţimile $(A_\alpha \mid \alpha<\omega_1)$ şi aplicaţiile φ_α^β ca în Exemplul 2.5.6 şi definim pe fiecare A_α, hiperprodusul $\circ$ prin

$$f\circ g = A_\alpha.$$

Folosind (2.5.1), obţinem un hipergrup(oid) pe $A^{\infty} = \{(0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1}\}$ cu hiperprodusul

$$(0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1} \circ (0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1} = (0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1}.$$

Funcţiile φ_α^β sunt omomorfisme ideale de hipergrupoizi şi dacă $\beta < \omega_1$ atunci

$$\varphi_\beta^\infty : A^\infty \to A_\beta,\ \varphi_\beta^\infty((0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1}) = 0_{E_\beta}$$

nu este omomorfism ideal deoarece

$$\begin{aligned}\varphi_\beta^\infty((0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1} \circ (0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1}) &= \varphi_\beta^\infty((0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1}) = 0_{E_\beta} \neq A_\beta = 0_{E_\beta} \circ 0_{E_\beta}\\ &= \varphi_\beta^\infty((0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1}) \circ \varphi_\beta^\infty((0_{E_\alpha})_{\alpha<\omega_1}).\end{aligned}$$

Dacă limita inversă a unui sistem invers de multialgebre din $\mathbf{Malg}(\tau)$ (în categoria sistemelor relaţionale de tip τ') este o multialgebră atunci această multialgebră este limita inversă în $\mathbf{Malg}(\tau)$ a sistemului dat. De aici rezultă următoarea teoremă.

Teorema 2.5.12. *Familia inversă de multialgebre $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ împreună cu omomorfismele $(\varphi_j^k \mid j,k \in I,\ j \leq k)$ determină un functor contravariant $G : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{Malg}(\tau)$. Dacă există multialgebra $\mathfrak{A}^\infty = (A^\infty, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ atunci, împreună cu omomorfismele $(\varphi_j^\infty \mid j \in I)$, este limita inversă a functorului G.*

Observaţia 2.5.13. Să considerăm următoarele diagrame:

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[r, "\varphi_j^k"] & A_j \\ & A^\infty \arrow[ul, "\varphi_k^\infty"] \arrow[u, "\varphi_j^\infty"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_k \arrow[r, "\varphi_j^k"] & A_j \\ A' \arrow[u, "\alpha_k"] \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A_j \\ A' \arrow[ur, "\alpha_j"] \arrow[r, "\mu"] & A^\infty \arrow[u, "\varphi_i^\infty"'] \end{tikzcd} .$$

Din Observaţia 2.5.2 rezultă că prima diagramă este comutativă. Dacă o multialgebră $\mathfrak{A}' = (A', (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$, împreună cu o familie $(\alpha_j : A' \to A_j \mid j \in I)$ de omomorfisme face a doua diagramă comutativă, atunci omomorfismul unic $\mu : A' \to A^\infty$ care face comutativă a treia diagramă este definit prin $\mu(x) = (\alpha_i(x))_{i\in I}$.

Definiţia 2.5.1. Dacă $\mathfrak{A}^\infty = (A^\infty, (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})$ este o multialgebră, o vom numi *limita inversă a sistemului invers de multialgebre* $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_j^k : A_j \to A_k \mid j,k \in I,\ j \leq k))$ şi o vom nota $\varprojlim \mathcal{A}$ sau $\varprojlim_{i\in I} \mathfrak{A}_i$.

Vom prezenta în continuare trei rezultate, similare Propoziţiei 2.3.8, Teoremei 2.3.10 şi Teoremei 2.3.12, care generalizează rezultate cunoscute pentru limitele inverse de algebre universale (ce pot fi găsite în [29, §21]). Şi aici am putea renunţa la unele justificări ele putând fi preluate de la mulţimi, dar, ţinând seama de raţionamentele pe care le desfăşurăm am optat pentru a le include în prezentarea noastră.

Menţionăm că în cele ce vor urma în acest paragraf când vom vorbi despre un sistem invers $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_j^k : A_j \to A_k \mid j, k \in I,\ j \leq k))$ de multialgebre vom considera că $(I, \leq)$ este o mulţime ordonată dirijată superior (chiar dacă unele proprietăţi ar fi valabile şi pentru cazul în care $(I, \leq)$ ar fi doar preordonată).

Fie $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_j^k : A_j \to A_k \mid j, k \in I,\ j \leq k))$ un sistem invers de multialgebre şi fie $J \subseteq I$ astfel încât $(J, \leq)$ este, de asemenea, o mulţime ordonată dirijată superior. Vom nota cu $\mathcal{A}_J$ sistemul invers format din multialgebrele $(\mathfrak{A}_i \mid i \in J)$ şi omomorfismele $(\varphi_j^i \mid\ i, j \in J,\ i \leq j)$.

Propoziţia 2.5.14. *Fie $\mathcal{A}$ un sistem invers de multialgebre având ca mulţime de indici pe $(I, \leq)$ şi fie $J \subseteq I$ cu proprietatea că $(J, \leq)$ este o mulţime ordonată dirijată superior cofinală în $(I, \leq)$. Sistemul relaţional $\varprojlim \mathcal{A}$ este o multialgebră dacă şi numai dacă $\varprojlim \mathcal{A}_J$ este o multialgebră. În acest caz, cele două multialgebre sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Corespondenţa

$$\psi : \varprojlim_{i \in I} A_i \to \varprojlim_{i \in J} A_i,\ \ \psi((a_i)_{i \in I}) = (a_i)_{i \in J},$$

care este de fapt o restricţie a proiecţiei canonice $\prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in J} A_i$, realizează o bijecţie între limitele inverse ale sistemelor inverse de mulţimi $(A_i \mid i \in I)$ şi $(A_i \mid i \in J)$.

Pentru a verifica faptul că ψ este surjectivă, pentru o familie dată $(b_i)_{i \in J} \in \varprojlim_{i \in J} A_i$ se defineşte o familie $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ astfel: pentru un $i \in I$ se alege $j \in J$ cu $i \leq j$ şi se consideră $a_i = \varphi_i^j(b_j)$. Familia $(a_i)_{i \in I}$ introdusă astfel este bine definită deoarece dacă $i \leq j' \in J$ atunci există o majorantă $m \in J$ pentru j şi j' şi

$$\varphi_i^j(b_j) = \varphi_i^j(\varphi_j^m(b_m)) = \varphi_i^m(b_m) = \varphi_i^{j'}(\varphi_{j'}^m((b_m)) = \varphi_i^{j'}(b_{j'}),$$

deci a_i nu depinde de alegerea lui j. Să remarcăm că $(b_i)_{i \in J} = (a_i)_{i \in J}$. Faptul că $(a_i)_{i \in I} \in \varprojlim_{i \in I} A_i$ rezultă astfel: dacă $i, k \in I$, $i \leq k$ atunci există $l \in J$ cu $k \leq l$ şi

$$\varphi_i^k(a_k) = \varphi_i^k(\varphi_k^l(a_l)) = \varphi_i^l(a_l) = a_i,$$

ceea ce finalizează demonstraţia surjectivităţii lui ψ.

Injectivitatea lui ψ este o consecinţă a faptului că mulţimea J este cofinală în I. Într-adevăr, o familie $(a_i)_{i\in J} \in \varprojlim_{i\in J} A_i$ determină în mod unic familia $(a_i)_{i\in I} \in \varprojlim_{i\in I} A_i$ pentru care $\psi((a_i)_{i\in I}) = (a_i)_{i\in J}$ deoarece pentru orice $i \in I$ există $j \in J$ cu $i \leq j$ şi atunci $a_i = \varphi_i^j(a_j)$.

Evident $\varprojlim_{i\in I} A_i = \emptyset$ dacă şi numai dacă $\varprojlim_{i\in J} A_i = \emptyset$, aşadar $\varprojlim \mathcal{A}$ şi $\varprojlim \mathcal{A}_J$ sunt multialgebre dacă şi numai dacă pentru orice $\gamma < o(\tau)$, $n_\gamma \neq 0$, şi atunci ele sunt izomorfe în mod trivial.

Să considerăm că mulţimile $\varprojlim_{i\in I} A_i$ şi $\varprojlim_{i\in j} A_i$ sunt nevide. Limita inversă $\varprojlim \mathcal{A}$ este o multialgebră dacă pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice elemente $(a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma - 1})_{i\in I} \in A^\infty$, membrul drept din (2.5.1) nu e mulţimea vidă. Conform cu observaţia 2.5.5, aceasta se întâmplă exact când sistemul invers de mulţimi nevide $(f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma-1}) \mid i \in I)$, împreună cu restricţiile aplicaţiilor φ_k^j, $j \geq k$, la aceste mulţimi, are limita nevidă. Se observă uşor din definiţia funcţiei ψ (şi din prima parte a acestei demonstraţii) că restricţiile sale

$$\varprojlim_{i\in I} f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma-1}) \to \varprojlim_{i\in J} f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma-1})$$

sunt, de asemenea, bijective, aşadar $\mathfrak{A}^\infty$ este o multialgebră dacă şi numai dacă $\mathfrak{A}'^\infty = \varprojlim \mathcal{A}_J$ este o multialgebră.

În ceea ce priveşte izomorfismul dintre multialgebrele $\mathfrak{A}^\infty$ şi $\mathfrak{A}'^\infty$, să verificăm că ψ este un omomorfism ideal de multialgebre. Pentru aceasta luăm un ordinal $\gamma < o(\tau)$, elementele $(a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I} \in A^\infty$ şi avem

$$\begin{aligned}
\psi(f_\gamma((a_i^0)_{i\in I}, \ldots, (a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I})) &= \psi(\varprojlim_{i\in I} f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma-1})) \\
&= \varprojlim_{i\in J} f_\gamma(a_i^0, \ldots, a_i^{n_\gamma-1}) \\
&= f_\gamma((a_i^0)_{i\in J}, \ldots, (a_i^{n_\gamma-1})_{i\in J}) \\
&= f_\gamma(\psi((a_i^0)_{i\in I}), \ldots, \psi((a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I})),
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia propoziţiei. □

Observaţia 2.5.15. Construcţiile de limite inverse din [16], [44] şi [46] sunt realizate pentru sisteme inverse de multialgebre (particulare) cu $(I, \leq)$ mulţime bine ordonată care are un maxim. Folosind Propoziţia 2.5.14, se observă că o astfel de limită este izomorfă cu acel membru al familiei de multialgebre din sistemul dat, care are ca indice acest maxim. Este clar că o astfel de limită inversă există şi are toate proprietăţile acestui membru.

Să considerăm că mulţimea suport I a mulţimii ordonate dirijate superior $(I,\leq)$ pe care este construit sistemul invers $\mathcal{A}=(\mathfrak{A}_i \mid i\in I)$ de multialgebre poate fi scrisă $I=\bigcup_{p\in P} I_p$, unde $(P,\leq)$ şi $(I_p,\leq)$ sunt mulţimi ordonate dirijate superior pentru orice $p\in P$, iar dacă $p,q\in P,\ p\leq q$ atunci $I_p\subseteq I_q$. Notăm

$$\varprojlim \mathcal{A}=\mathfrak{A}^\infty=(A^\infty,(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)}),\ \varprojlim \mathcal{A}_{I_p}=\mathfrak{A}_p^\infty=(A_p^\infty,(f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)})\ (p\in P),$$

dacă aceste multialgebre există. Pentru orice $p,q\in P,\ p\leq q$ se definesc aplicaţiile

$$\psi_p^q: A_q^\infty\to A_p^\infty,\ \psi_p^q((a_i)_{i\in I_q})=(a_i)_{i\in I_p}.$$

Este imediat faptul că $\psi_{pp}=1_{A_p^\infty}$, oricare ar fi $p\in P$, iar dacă $p,q,r\in P,\ p\leq q\leq r$ atunci are loc egalitatea $\psi_p^q\circ\psi_q^r=\psi_p^r$. Astfel s-a obţinut un sistem invers de mulţimi constând din mulţimea odonată $(P,\leq)$, mulţimile A_p^∞ şi funcţiile ψ_p^q, pe care o notăm cu $\mathcal{A}/P$.

Teorema 2.5.16. *Presupunem că pentru orice $p\in P$, $\mathfrak{A}_p^\infty$ este o multialgebră. Atunci $\mathcal{A}/P$ este un sistem invers de multialgebre şi $\varprojlim\mathcal{A}$ este multialgebră dacă şi numai dacă $\varprojlim\mathcal{A}/P$ este multialgebră. În acest caz, cele două multialgebre sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Începem prin a arăta că pentru orice $p,q\in P,\ p\leq q$, funcţia ψ_p^q este un omomorfism de multialgebre. Dacă $\gamma<o(\tau)$ şi $(a_i^0)_{i\in I_q},\ldots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I_q}\in A_q^\infty$ atunci avem

$$\begin{aligned}
\psi_p^q(f_\gamma((a_i^0)_{i\in I_q},\ldots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I_q})) &= \psi_p^q\left(\prod_{i\in I_q} f_\gamma(a_i^0,\ldots,a_i^{n_\gamma-1})\cap A_q^\infty\right)\\
&\subseteq \prod_{i\in I_p} f_\gamma(a_i^0,\ldots,a_i^{n_\gamma-1})\cap A_p^\infty\\
&= f_\gamma((a_i^0)_{i\in I_p},\ldots,(a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I_p})\\
&= f_\gamma(\psi_p^q((a_i^0)_{i\in I_q}),\ldots,\psi_p^q((a_i^{n_\gamma-1})_{i\in I_q}))).
\end{aligned}$$

În continuare vom privi elementele din produsul cartezian $\prod_{i\in I} A_i$ ca funcţii $I\to\bigcup_{i\in I} A_i$. Notăm cu A'^∞ limita inversă a sistemului invers de mulţimi $\mathcal{A}/P$. Corespondenţa

$$A^\infty\to A'^\infty,\ g\mapsto h_g,$$

unde $h_g \in \prod_{p\in P} A_p^\infty$ este definită prin

$$h_g(p) = g|_{I_p} \in A_p^\infty$$

defineşte o aplicaţie bijectivă ψ.

Fie $p, q \in P$, $p \leq q$. Din $\psi_p^q(h_g(q)) = \psi_p^q(g|_{I_q}) = g|_{I_p} = h_g(p)$ rezultă că $h_g \in A'^\infty$.

Dacă se cunoaşte h_g atunci se poate reconstrui g deoarece dacă $i \in I$ atunci există $p \in P$ astfel ca $i \in I_p$ şi astfel $g(i) = (h_g(p))(i)$; aceasta arată că ψ este injectivă.

ψ este surjectivă deoarece dacă $h \in A'^\infty$ atunci se consideră g dat prin $g(i) = (h(p))(i)$ $(i \in I_p,\ p \in P)$ şi $h_g = h$; rămâne de arătat doar că g este bine definită în acest fel, şi aceasta se întâmplă deoarece dacă $i \in I_q$ $(q \in P)$ atunci există $r \in P$ cu $p, q \leq r$ iar din

$$\psi_p^r(h(r)) = h(r)|_{I_p} = h(p) \text{ şi } \psi_q^r(h(r)) = h(r)|_{I_q} = h(q)$$

se deduce $(h(p))(i) = (h(r))(i) = (h(q))(i)$.

Să remarcăm că $A'^\infty = \emptyset$ dacă şi numai dacă $A^\infty = \emptyset$. În particular, dacă $A_p^\infty = \emptyset$ atunci $A'^\infty = A^\infty = \emptyset$. Oricum, în această situaţie, $\varprojlim \mathcal{A}$ şi $\varprojlim \mathcal{A}/P$ sunt multialgebre dacă şi numai dacă $n_\gamma \neq 0$ pentru orice $\gamma < o(\tau)$, iar atunci ele sunt izomorfe. Putem, deci, considera că mulţimile $A_p^\infty,\ A'^\infty,\ A^\infty$ sunt nevide.

$\varprojlim \mathcal{A} = \mathfrak{A}^\infty$ este o multialgebră dacă şi numai dacă pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi pentru orice $g_0, \ldots, g_{n_\gamma - 1} \in A^\infty$ limita inversă a sistemului invers de mulţimi $(f_\gamma(g_0(i), \ldots, g_{n_\gamma-1}(i)) \mid i \in I)$ este nevidă. După cum reiese şi din prima parte a acestei demonstraţii, restricţia funcţiei ψ la această limită inversă de de mulţimi este o bijecţie între

$$f_\gamma(g_0, \ldots, g_{n_\gamma-1}) = \varprojlim_{i\in I} f_\gamma(g_0(i), \ldots, g_{n_\gamma-1}(i))$$

şi limita inversă

$$\begin{aligned}\varprojlim_{p\in P}(\varprojlim_{i\in I_p} f_\gamma(g_0(i), \ldots, g_{n_\gamma-1}(i))) &= \varprojlim_{p\in P} f_\gamma(g_0|_{I_p}, \ldots, g_{n_\gamma-1}|_{I_p}) \\ &= \varprojlim_{p\in P} f_\gamma(h_{g_0}(p), \ldots, h_{g_{n_\gamma-1}}(p)) \\ &= f_\gamma(h_{g_0}, \ldots, h_{g_{n_\gamma-1}})\end{aligned}$$

Conform ipotezei,

$$\begin{aligned}f_\gamma(g_0|_{I_p}, \ldots, g_{n_\gamma-1}|_{I_p}) &= \varprojlim_{i\in I_p} f_\gamma(g_0|_{I_p}(i), \ldots, g_{n_\gamma-1}|_{I_p}(i)) \\ &= \varprojlim_{i\in I_p} f_\gamma(g_0(i), \ldots, g_{n_\gamma-1}(i)) \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Deducem că f_γ este o multioperaţie pe A^∞ dacă şi numai dacă f_γ este o multioperaţie pe A'^∞. Mai mult, rezultă că

$$\psi(f_\gamma(g_0,\ldots,g_{n_\gamma-1}))=f_\gamma(h_{g_0},\ldots,h_{g_{n_\gamma-1}})=f_\gamma(\psi(g_0),\ldots,\psi(g_{n_\gamma-1})))$$

deci ψ este un izomorfism de multialgebre. □

Vom spune că o *clasă de multialgebre* este *închisă la limite inverse de sisteme inverse* (*bine ordonate*) dacă pentru orice sistem invers (bine ordonat) de multialgebre din această clasă limita inversă este o multialgebră din această clasă.

Acum putem demonstra următoarea teoremă:

Teorema 2.5.17. *Fie K o clasă algebrică de multialgebre. Clasa K este închisă la limite inverse de sisteme inverse arbitrare dacă şi numai dacă este închisă la limite inverse de sisteme inverse bine ordonate.*

Demonstraţie. Demonstraţia este asemănătoare cu cea a Teoremei 2.3.12 cu observaţia că trebuie ţinut cont de existenţa limitei inverse ca multialgebră. Presupunem, deci, K închisă la limite inverse de sisteme inverse bine ordonate. Fie $\mathcal{A}=(\mathfrak{A}_i\mid i\in I)$ un sistem invers de multialgebre. Dacă afirmaţia din enunţ nu ar fi adevărată, atunci s-ar putea alege $\mathfrak{A}$ astfel ca $|I|=\mathfrak{m}$ să fie cel mai mic posibil cu proprietatea că sau limita inversă sistemului $\mathcal{A}$ nu e multialgebră, sau $\varprojlim\mathcal{A}\notin K$. Din Propoziţia 2.5.14 rezultă $\mathfrak{m}\geq\aleph_0$ şi, folosind Lema 2.3.11, se poate considera $I=\bigcup_{\delta<\alpha}I_\delta$, unde α este un ordinal, $(I_\delta,\leq)$ este dirijată superior, $I_{\delta_1}\subseteq I_{\delta_2}$ dacă $\delta_1\leq\delta_2<\alpha$ şi $|I_\delta|<|I|=\mathfrak{m}$. Din minimalitatea lui $\mathfrak{m}$ se obţine că $\varprojlim\mathfrak{A}_{I_\delta}$, $\delta<\alpha$, sunt multialgebre din K, iar conform presupunerii făcute, $\varprojlim\mathcal{A}/P$ este o multialgebră din K. Aplicând Teorema 2.5.16 se deduce că multialgebra $\varprojlim\mathcal{A}$ există şi este în K, contradicţie. □

2.6 Asupra algebrei fundamentale a limitei inverse a unui sistem invers de multialgebre

În general, functorul F din Observaţia 1.6.21 nu comută cu limitele inverse de sisteme inverse de multialgebre, chiar dacă acestea sunt multialgebre. Acest fapt va fi ilustrat prin Exemplul 2.6.2 şi se obţine din Exemplul 2.2.8 folosind următorul exemplu de limită inversă:

Exemplul 2.6.1. Fie o mulţime I şi fie $(\mathfrak{A}_i \mid i \in I)$ o familie de multialgebre de tip τ. Ca în [29, p.133] se poate obţine un sistem invers de multialgebre considerând mulţimea $(J, \subseteq)$ a tuturor submulţimilor finite nevide ale mulţimii I, ordonată cu incluziunea, $\mathfrak{B}_j = \prod_{i \in j} \mathfrak{A}_i$, pentru orice $j \in J$, şi proiecţiile canonice $\varphi_{j_1}^{j_0}$ de la $\prod_{i \in j_0} \mathfrak{A}_i$ la $\prod_{i \in j_1} \mathfrak{A}_i$, pentru orice $j_0 \supseteq j_1$ din J. Limita inversă a acestui sistem invers de multialgebre este o multialgebră izomorfă cu $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.

Considerăm că toate mulţimile A_i sunt nevide. Bijecţia ψ dintre $\prod_{i \in I} A_i$ şi limita inversă a sistemului invers corespunzător mulţimilor suport B_j ale multialgebrelor $\mathfrak{B}_j$ este dată de $\psi(g) = h_g$, unde $h_g(j) = g|_j$ pentru orice $j \in J$.

Pentru orice $\gamma < o(\tau)$ şi orice $g_0, \ldots, g_{n_\gamma - 1} \in \prod_{i \in I} A_i$ avem

$$\begin{aligned}
\psi(f_\gamma(g_0, \ldots, g_{n_\gamma-1})) = \psi\left(\prod_{i \in I} f_\gamma(g_0(i), \ldots, g_{n_\gamma-1}(i))\right) &\subseteq \varprojlim_{j \in J} \prod_{j \in J} f_\gamma(g_0(j), \ldots, g_{n_\gamma-1}(j)) \\
&= \varprojlim_{j \in J} f_\gamma(g_0|_j, \ldots, g_{n_\gamma-1}|_j) = \varprojlim_{j \in J} f_\gamma(h_{g_0}(j), \ldots, h_{g_{n_\gamma-1}}(j)) \\
&= f_\gamma(h_{g_0}, \ldots, h_{g_{n_\gamma-1}}) = f_\gamma(\psi(g_0), \ldots, \psi(g_{n_\gamma-1}))).
\end{aligned}$$

Aceasta arată în mod clar că $f_\gamma(h_{g_0}, \ldots, h_{g_{n_\gamma-1}}) \neq \emptyset$, deci că limita inversă a sistemului corespunzător familiei $(\mathfrak{B}_j \mid j \in J)$ este o multialgebră. Mai mult, incluziunea din şirul anterior de relaţii este chiar egalitate, ceea ce face din ψ un izomorfism de multialgebre. Într-adevăr, dacă

$$h \in \varprojlim_{j \in J} \left(\prod_{j \in J} f_\gamma(g_0(j), \ldots, g_{n_\gamma-1}(j))\right) \subseteq \varprojlim_{j \in J} B_j$$

atunci există $g \in \prod_{i \in I} A_i$ astfel ca $h = \psi(g) = h_g$, iar cum g este determinat de imaginile prin h ale submulţimilor cu un element $\{i\}$ ale lui I, şi cum aceste imagini sunt în mulţimile $f_\gamma(g_0(i), \ldots, g_{n_\gamma-1}(i))$ este clar că $g \in \prod_{i \in I} f_\gamma(g_0(i), \ldots, g_{n_\gamma-1}(i))$.

Exemplul 2.6.2. Considerăm în exemplul de mai sus $I = \mathbb{N}$ şi considerăm că fiecare multialgebră $\mathfrak{A}_i$ este hipergrupul $(\mathbb{Z}, \circ)$. Obţinem un sistem invers format din hipergrupurile $(H_j, \circ) = (\mathbb{Z}^j, \circ)$ cu $j \subseteq \mathbb{N}$ finită. Cum grupul fundamental al unui produs direct finit de hipergrupuri este produsul direct al grupurilor fundamentale ale acestora, fiecare dintre hipergrupurile H_i are ca grup fundamental grupul cu un element. Aceasta înseamnă că limita inversă a sistemului invers al grupurilor fundamentale este grupul cu un element.

Cu toate acestea, grupul fundamental al limitei inverse a sistemului invers $((H_j, \circ) \mid j \subseteq \mathbb{N}$ finită) este, conform exemplului de mai sus, izomorf cu grupul fundamental al puterii directe $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, iar acesta are cel puţin două elemente.

În cele ce vor urma vom găsi condiţii pentru ca functorul F să comute cu limitele inverse de sisteme inverse de multialgebre.

Fie $\mathcal{A} = ((\mathfrak{A}_i \mid i \in I), (\varphi_j^k : A_j \to A_k \mid j, k \in I,\ j \leq k))$ un sistem invers de multialgebre. Vom nota cu $\overline{\mathcal{A}}$ sistemul invers format din algebrele fundamentale $(\overline{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I)$ ale multialgebrelor din $\mathcal{A}$ şi omomorfismele $(\overline{\varphi_j^i} \mid i, j \in I,\ i \geq j)$. Astfel, dacă privim sistemul invers $\mathcal{A}$ ca pe un functor contravariant G (vezi Teorema 2.5.12) atunci familia inversă $\overline{\mathcal{A}}$ reprezintă functorul contravariant $F \circ G$.

În acest paragraf ne vom referi la limita inversă $\varprojlim \mathcal{A}$ a sistemului invers $\mathcal{A}$ ca limita inversă $(\mathfrak{A}^\infty,\ (\varphi_i^\infty \mid i \in I))$ a functorului G. Evident, $\varprojlim \overline{\mathcal{A}} = \varprojlim (F \circ G)$. Să notăm, de asemenea, $(\overline{\mathfrak{A}^\infty},\ (\overline{\varphi_i^\infty} \mid i \in I))$ cu $\overline{\varprojlim \mathcal{A}}$. Atunci avem:

Propoziţia 2.6.3. *Fie $\mathcal{A}$ un sistem invers de multialgebre construit pe mulţimea ordonată (dirijată superior) $(I, \leq)$ şi $J \subseteq I$ submulţime cofinală în $(I, \leq)$. Presupunem că $\varprojlim \mathcal{A}_J$ este o multialgebră. În aceste condiţii, $\overline{\varprojlim \mathcal{A}}$ este limita inversă a sistemului invers de algebre universale $\overline{\mathcal{A}}$ dacă şi numai dacă $\overline{\varprojlim \mathcal{A}_J}$ este limita inversă a sistemului invers de algebre universale $\overline{\mathcal{A}_J}$.*

Demonstraţie. Din faptul că $\varprojlim \mathcal{A}_J$ este multialgebră rezultă că $\varprojlim \mathcal{A}$ este multialgebră şi, cum ele sunt izomorfe (Propoziţia 2.5.14), functorul F induce un izomorfism de la $\overline{\varprojlim \mathcal{A}}$ la $\overline{\varprojlim \mathcal{A}_J}$. Desigur, sistemul invers de multialgebre $\mathcal{A}_J$ determină sistemul invers de algebre universale $\overline{\mathcal{A}_J} = \overline{\mathcal{A}}_J$ şi algebrele limită inversă $\varprojlim \overline{\mathcal{A}}$ şi $\varprojlim \overline{\mathcal{A}}_J$ sunt izomorfe. Din proprietatea de universalitate ce caracterizează limita inversă obţinem omomorfismele:

$$\overline{\varprojlim \mathcal{A}} \to \varprojlim \overline{\mathcal{A}},\ \overline{(a_i)_{i \in I}} \mapsto (\overline{a_i})_{i \in I};$$
$$\overline{\varprojlim \mathcal{A}_J} \to \varprojlim \overline{\mathcal{A}}_J,\ \overline{(a_i)_{i \in J}} \mapsto (\overline{a_i})_{i \in J},$$

care, împreună cu izomorfismele menţionate anterior, fac următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\varprojlim \mathcal{A}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\varprojlim \mathcal{A}_J} \arrow[d] \\
\varprojlim \overline{\mathcal{A}} \arrow[r] & \varprojlim \overline{\mathcal{A}}_J
\end{tikzcd}.$$

Cum fiecare din condiţiile ale căror echivalenţă urmărim să o demonstrăm face izomorfism din câte un morfism vertical, concluzia propoziţiei este imediată. □

Propoziţia 2.6.4. *Folosind notaţiile din paragraful anterior, să presupunem că pentru orice* $p \in P$, $\mathfrak{A}_p^{\infty}$ *este o multialgebră şi că* $\overline{\varprojlim \mathcal{A}_{I_p}}$ *este limita inversă a sistemului invers de algebre universale* $\overline{\mathcal{A}_{I_p}}$*. Presupunem, de asemenea, că* $\varprojlim \mathcal{A}$ *este o multialgebră. Atunci* $\overline{\varprojlim \mathcal{A}}$ *este limita inversă a sistemului invers* $\overline{\mathcal{A}}$ *dacă şi numai dacă* $\overline{\varprojlim \mathcal{A}/P}$ *este limita inversă a sistemului invers* $\overline{\mathcal{A}/P}$*.*

Demonstraţie. Folosind faptul că pentru orice $p \in P$, $\overline{\varprojlim \mathcal{A}_{I_p}} = \varprojlim \overline{\mathcal{A}_{I_p}}$ rezultă că

$$\overline{\mathcal{A}}/P = \overline{\mathcal{A}/P}.$$

Din Teorema 2.5.16 (mai exact, din corespondenta ei de la algebre universale — [29, §21, Teorema 3]) rezultă un izomorfism de la $\varprojlim \overline{\mathcal{A}}$ la

$$\varprojlim \overline{\mathcal{A}}/P = \varprojlim \overline{\mathcal{A}/P}.$$

Folosind încă o dată Teorema 2.5.16 şi proprietatea de universalitate a limitei inverse obţinem următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\varprojlim \mathcal{A}} & \longrightarrow & \overline{\varprojlim \mathcal{A}/P} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\varprojlim \overline{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \varprojlim \overline{\mathcal{A}/P}
\end{array}.$$

Un raţionament analog cu cel din finalul demonstraţiei propoziţiei anterioare conduce la concluzia dorită. □

Fie K o clasă de multialgebre de tip τ. Considerând ca morfisme acele omomorfisme care sunt definite între două multialgebre din K obţinem o subcategorie $\mathcal{K}$ a categoriei $\mathbf{Malg}(\tau)$. Cum compunerea $F \circ U$ a functorului F cu functorul de incluziune $U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{Malg}(\tau)$ este determinată de F, ne vom referi la această compunere ca fiind functorul $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\tau)$.

Teorema 2.6.5. *Fie* K *o clasă algebrică de multialgebre închisă la limite inverse de sisteme inverse bine ordonate. Functorul* F *comută cu limitele inverse de sisteme inverse arbitrare de multialgebre din* K *dacă şi numai dacă comută cu limitele inverse de sisteme inverse bine ordonate de multialgebre din* K*.*

Demonstraţie. Să presupunem că F comută cu limitele inverse de sisteme inverse bine ordonate de multialgebre din K. Dacă F nu ar comuta cu limitele inverse de sisteme inverse arbitrare de multialgebre din K atunci am putea alege un sistem invers $\mathcal{A}$ de multialgebre din K având $(I, \leq)$ astfel încât $\overline{\varprojlim \mathcal{A}}$ nu este $\varprojlim \overline{\mathcal{A}}$ şi $|I| = \mathfrak{m}$ este cel mai mic cu această proprietate. Continuăm ca în demonstraţia Teoremei 2.5.17, ca urmare vom folosi aceleaşi notaţii. Mai întâi obţinem (folosind Propoziţia 2.6.3) că $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ şi atunci, din minimalitatea lui $\mathfrak{m}$, din presupunerea noastră şi din Propoziţia 2.6.4 va rezulta că

$$\overline{\varprojlim \mathcal{A}_{I_\delta}} = \varprojlim \overline{\mathcal{A}_{I_\delta}},$$

pentru orice $\delta < \alpha$, şi

$$\overline{\varprojlim \mathcal{A}} = \overline{\varprojlim \mathcal{A}/P} = \varprojlim \overline{\mathcal{A}/P} = \varprojlim \overline{\mathcal{A}}/P = \varprojlim \overline{\mathcal{A}},$$

contradicţie. $\square$

Bibliografie

[1] Benado, M., Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier, II, *Czechoslovak Math. J.*, **5(80)** 1955, 308–344.

[2] Benado, M., Rectification à mon travail "Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier, II", *Czechoslovak Math. J.*, **6(81)** 1956, 287–288.

[3] Both, N.; Purdea, I., Tolerances, *"Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminaries, Seminar of Algebra*, Preprint **2** 1982, 8–38.

[4] Breaz, S.; Pelea, C., Multialgebras and term functions over the algebra of their nonvoid subsets, *Mathematica (Cluj)* **43(66)**, 2, 2001, 143–149.

[5] Bruck, R., A survey of binary systems, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag*, 1958.

[6] Burris S.; Sankappanavar H.P., A course in universal algebra, *Springer–Verlag, New-York* 1981.

[7] Campaigne, H., Partition hypergroups, *Amer. J. Math.*, **62** 1940, 599–612.

[8] Călugăreanu, Gr.; Leoreanu, V., Hypergroups associated with lattices, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, **9** 2001, 165–173.

[9] Cohn, P. M., Universal algebra, *Harper and Row, New York, Evanston and London*, 1965.

[10] Corsini, P., Prolegomena of hypergroup theory. Supplement to Riv. Mat. Pura Appl., *Aviani Editore, Tricesimo*, 1993.

Corsini, P., Introducere în teoria hipergrupurilor. *Editura Universităţii ,,Al. I. Cuza", Iaşi*, 1998 (traducere în limba română).

[11] Corsini, P., On the hypergroups associated with binary relations, *Multiple Valued Logic*, **5** 2000, 407–419.

[12] Corsini, P.; Leoreanu, V., Join spaces associated with fuzzy sets, *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences*, **20** 1995, 293–303.

[13] Corsini, P.; Leoreanu, V., About the heart of a hypergroup, *Acta Univ. Carolinae, Math. Phys.*, **37**, 1, 1996, 17–29.

[14] Corsini, P.; Leoreanu, V., Hypergroups and binary relations, *Algebra Universalis*, **43** 2000, 321–330.

[15] Corsini, P.; Leoreanu, V., Fuzzy sets and join spaces associated with rough sets, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Ser. II*, **51** 2002, 527–536.

[16] Corsini, P.; Leoreanu, V., Applications of hyperstructure theory, *Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London*, 2003.

[17] Corsini, P.; Romeo, G., Hypergroupes complets et τ-groupoides, *Convegno su "Sistemi binari e loro applicazioni", Taormina*, 1978.

[18] De Salvo, M.; Lo Faro, G., On the n^*-complete hypergroups, *Combinatorics (Assisi 1996), Discrete Math.*, **208/209** 1999, 177–188.

[19] Dresher, M.; Ore, O., Theory of multigroups, *Amer. J. Math.*, **60** 1938, 705–733.

[20] Eaton, J. E., Associative multiplicative systems, *Amer. J. Math.*, **62** 1940, 222–232.

[21] Eaton, J. E., Theory of cogroups, *Duke Math. J.*, **6** 1940, 101–107.

[22] Eaton, J. E.; Ore, O., Remarks on multigroups, *Amer. J. Math.*, **62** 1940, 67–71.

[23] Freni, D., Structure des hypergroupes quotients et des hypergroupes de type U, *Ann. Sci. Univ. Clermont II. Sér. Math.*, **22** 1984, 51–77.

[24] Freni, D., Sur les hypergroupes de type U et sous-hypergroupes engendrés par un sous-ensemble, *Riv. Mat. Univ. Parma* **4(13)** 1987, 29–41.

[25] Freni, D., Une note sur le coeur d'un hypergroupe et sur la cloture β^* de β, *Riv. Mat. Pura Appl.*, **8** 1991, 153–156.

[26] Freni, D., A new characterization of the derived hypergroup via strongly regular equivalences, *Comm. Algebra* **30**, 2002, 3977–3989.

[27] Grätzer, G., A representation theorem for multi-algebras, *Arch. Math.* **3**, 1962, 452–456.

[28] Grätzer, G., On the family of certain subalgebras of a universal algebra, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **68** 1965, 790–802.

[29] Grätzer, G., Universal algebra. Second edition, *Springer–Verlag* 1979.

[30] Guţan, M., Hypergroup structures over families of subsets of a hypergroup, *Riv. Mat. Pura Appl.*, **8** 1991, 63–68.

[31] Guţan, M., On the transitivity of the relation β in semihypergroups, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **45** 1996, 189–200.

[32] Hansen, D. J., An axiomatic characterization of multilattices, *Discrete Math.*, **33** 1981, 99–101.

[33] Hansoul, G. E., A simultaneous characterization of subalgebras and conditional subalgebras of a multialgebra, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **50** (1981), 16–19.

[34] Hansoul, G. E., A subdirect decomposition theorem for multialgebras, *Algebra Universalis*, **16** 1983, 275–281.

[35] Higman, G.; Stone, A. H., On inverse systems with trivial limits, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 233–236.

[36] Höft, H.; Howard, P. E., Representing multi-algebras by algebras, the axiom of choice, and the axiom of dependent choice, *Algebra Universalis*, **13** 1981, 69–77.

[37] Johnson, K. W.; Mattarei, S.; Sehgal, S. K., Weak Cayley tables, *J. London Math. Soc.*, **(2)61** 2000, 395–411.

[38] Krasner, M., La caractérisation des hypergroupes de classes et le problème de Schreier dans les hypergroupes I, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **212** 1941, 948–950.

[39] Kuntzmann, J., Opérations multiformes. Hypergroupes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **204** 1937, 1787–1788.

[40] Leoreanu, V., Sur la limite directe d'hypergroupes, XIth National Conference of Algebra (Constanţa, 1994), *An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat.*, 2 (1994), 99–105.

[41] Leoreanu, V., On the heart of join spaces and of regular hypergroups, *Riv. Mat. Pura Appl.* **17** 1996, 133–142.

[42] Leoreanu, V., The heart of some important classes of hypergroups, *Pure Math. Appl.* **9** 1988, no. 3-4, 351–360.

[43] Leoreanu, V., The class of hypergroups in which the heart is the set of identities, *Le Matematiche*, **54** 1999, fasc. 1, 49–54.

[44] Leoreanu, V., Direct limit and inverse limit of join spaces associated with fuzzy sets, *Pure Math. Appl.* **11** 2000, no. 3, 509–516.

[45] Leoreanu, V., Direct limits and products of join spaces associated with rough sets part II, *Int. J. Sci. Technol. Univ. Kashan*, **1**, 1, 2000, 33–40.

[46] Leoreanu, V., Direct limits and inverse limits of *SHR* semigroups, *Southeast Asian Bulletin of Math.* **25** 2001, 421–426.

[47] Marty, F., Sur une généralisation de la notion de groupe, *Actes d'huitième Congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm*, 1934, 45–49.

[48] Marty, F., Rôle de la notion de d'hypergroupe dans l'etude de groupes non abéliens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **201** 1935, 636–638.

[49] Marty, F., Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle, *Ann. de l'École Normale*, **53** 1936, 83–123.

[50] Maurer, I. Gy.; Purdea, I.; Virág, I., Tolerances on algebras, *"Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminaries, Seminar of Algebra*, Preprint **2** 1982, 39–75.

[51] McMullen, J. R.; Price, J. F., Reversible hypergroups, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **47** 1977, 67–85.

[52] McMullen, J. R., An algebraic theory of hypergroups, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **20** 1979, 35–55.

[53] McMullen, J. R.; Price, J. F., Duality for finite abelian hypergroups over splitting fields, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **20** 1979, 57–70.

[54] Migliorato, R., Semi-ipergruppi e ipergruppi n-completi, *Ann. Sci. Univ. Clermont II. Sér. Math.*, **23** 1986, 99–123.

[55] Mittas, J., Hypergroupes canoniques, *Math. Balk.* **2** 1972, 165–179.

[56] Mitchell, Barry, Theory of categories. Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII *Academic Press, New York–London* 1965.

[57] Ore, O., Structures and group theory. I, *Duke Math. J.*, **3** 1937, 149–174.

[58] Pelea, C., About a category of canonical hypergroups, *Ital. J. Pure Appl. Math.* **7** 2000, 157–166.

[59] Pelea, C., On the fundamental relation of a multialgebra, *Ital. J. Pure Appl. Math.* **10** 2001, 141–146.

[60] Pelea, C., Multialgebras and term functions over the algebra of their nonvoid subsets, *Proceedings of the Algebra Symposium, "Babeş-Bolyai" University, November 23–24, 2001, Ed. Fundaţiei pentru Studii Europene, Cluj–Napoca*, 2002, 165–172.

[61] Pelea, C., On the direct product of multialgebras, *Studia Univ. Babeş–Bolyai Math.*, **48**, 2, 2003, 93–98.

[62] Pelea, C., Identities and multialgebras, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, acceptată spre publicare.

[63] Pelea, C., On the fundamental algebra of a direct product of multialgebras, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, acceptată spre publicare.

[64] Pelea, C., On the direct limit of a direct family of multialgebras, preprint.

[65] Pelea, C., On the inverse limit of an inverse family of multialgebras, preprint.

[66] Pelea, C.; Purdea, I., On the factor multialgebra of a multialgebra, preprint.

[67] Pickett, H. E., Homomorphisms and subalgebras of multialgebras, *Pacific J. Math.* **21** 1967, 327–342.

[68] Purdea, I., Tratat de algebră moderna. Vol. II, *Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti*, 1982.

[69] Purdea, I.; Pic, Gh., Tratat de algebră modernă. Vol. I, *Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti*, 1977.

[70] Romeo, G., Limite diretto di semi-ipergruppi, e ipergruppi d'associatività, *Riv. Mat. Univ. Parma* **8** 1982, 281–288.

[71] Rosenberg, I. G., Hypergroups and join spaces determined by relations, *Ital. J. Pure Appl. Math.* **4** 1998, 93–101.

[72] Roth, R. L., Character and conjugacy class hypergroups of a finite group, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, IV, **105** 1975, 295-311.

[73] Roth, R. L., On derived canonical hypergroups, *Riv. Mat. Pura Appl.* **3** 1988, 81–85.

[74] Roth, R. L., A dual relationship of characters and conjugacy classes of a finite group, preprint.

[75] Schweigert, D., Congruence relations of multialgebras, *Discrete Math.*, **53** 1985, 249–253.

[76] Spartalis, S.; Vougiouklis, T., The fundamental relations on H_v-rings, *Riv. Mat. Pura Appl.*, **13** 1994, 7–20.

[77] Ştefănescu, M., Looking at hypergroups, *Algebraic Hyperstructures and Applications (Iaşi, 1993), Hadronic Press, Palm Harbor, FL*, 1994, 147–152.

[78] Ştefănescu, M., On constructions of hypergroups, *Contributions to Gen. Alg. 9, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1995 -Verlag B. G. Teubner, Stuttgart*, 297–308.

[79] Ştefănescu, M., O relaţie ternară definind un hipergrup, *Bul. Şt. Acad. Navală Mircea cel Bătrân, Constanţa*, **1** 1996, 117–120.

[80] Ştefănescu, M., Construction of hypergroups, *New frontiers in hyperstructures (Molise, 1997)*, Ser. New Front. Adv. Math. Ist. Ric. Base, *Hadronic Press, Palm Harbor, FL*, 1998, 64–87.

[81] Utumi, Y., On hypergroups of group right cosets, *Osaka Math. J.*, **1** 1949, 73–80.

[82] Vougiouklis, T., Representations of hypergroups by hypermatrices, *Riv. Mat. Pura Appl.* **2** (1987), 7–19.

[83] Vougiouklis, T., The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield, *Proc. Fourth Int. Congress on AHA, Xanthi 1990, World Scientific*, 1991, 203–211.

[84] Vougiouklis, T., Representations of hypergroups by generalized permutations, *Algebra Universalis* **29** 1992, 172–183.

[85] Vougiouklis, T., Representations of H_v-structures, *Proceedings of the International Conference on Group Theory, Timişoara, September 17–20*, 1992, 159–184.

[86] Vougiouklis, T., H_v-groups defined on the same set, *Discrete Math.*, **155** 1996, 259–265.

[87] Vougiouklis, T., Construction of H_v-structures with desired fundamental structures, *New frontiers in hyperstructures (Molise, 1995)*, Ser. New Front. Adv. Math. Ist. Ric. Base,*Hadronic Press, Palm Harbor, FL*, 1996, 177–188.

[88] Vougiouklis, T., On H_v-rings and H_v-representations, *Discrete Math.*, **208/209** 1999, 615–620.

[89] Walicki, M.; Meldal, S., Multialgebras, power algebras and complete calculi of identities and inclusions, ADT '94, *Recent Trends in Data Type Specification, LNCS*, **906** 1995.

[90] Walicki, M.; Białasik, M., Relations, multialgebras and homomorphisms, material bibliografic disponibil pe internet la adresa *http://www.ii.uib.no/~michal/*.

[91] Wall, H. S., Hypergroups, *Amer. J. Math.*, **59** 1937, 77–98.

Index