Ex2: Într-o clasă învață 40 elevi. Dintre aceștia, 14 au preocupări pentru matematică, 16 pentru fizică și 11 pentru chimie. De asemenea, 7 elevi au preocupări pentru matematică și fizică, 8 pentru fizică și chimie și 5 elevi pentru matematică și chimie, iar 4 elevi au preferințe pentru toate cele 3 materii. Câți elevi nu au preferințe pentru matematică, fizică sau chimie?

Ex1: În câte moduri se poate ordona mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât fiecare număr divizibil cu 2 să aibă rangul divizibil cu 2 și fiecare număr divizibil cu 3 să aibă rangul divizibil cu 3?

Principiul includerii și al excluderii

← Ex

Fie X o mulțime, $m : X \to \mathbb{R}$, $A \subseteq X$ finită.

$$m(A) = \begin{cases} \sum_{x \in A} m(x), & A \neq \emptyset \\ 0, & A = \emptyset \end{cases}$$ măsura mult. A.

Obs: 1) $A, B \subseteq X$, $A \cap B = \emptyset \implies m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

2) $m(x) = 1, \forall x \in X \implies m(A) = |A|$

3) Codomeniul lui m poate fi considerat și altă mulțime numerică (formată din nr. nenegative).

4) X finită, $\bar{A} = X \setminus A \implies m(\bar{A}) = m(X) - m(A)$

[~~5) $m(\bigcup_{i \in \emptyset} A_i) = m(\bigcap_{i \in \emptyset} A_i) = 0$ prin definiție~~]???

În continuare X finită.

P1. X mulțime finită, $A_1, \dots, A_q \subseteq X$. Atunci:

$$m(A_1 \cup \dots \cup A_q) = \sum_{i=1}^{q} m(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le q} m(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{q+1} m\left(\bigcap_{i=1}^{q} A_i\right)$$

Dem: inducție după q.

C: $$\left|\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le q} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{q+1} \left|\bigcap_{i=1}^{q} A_i\right|$$

(principiul includerii și excluderii)

Dem: $m(A) = |A| \implies \dots$

P2 $$m(A_1 \cap \dots \cap A_q) = \sum_{i=1}^{q} m(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le q} m(A_i \cup A_j) + \dots + (-1)^{q+1} m\left(\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right).$$

Dem (dual)

P3 (Sylvester): Fie $A_1, \dots, A_q \subseteq X$.

Măsura mulțimii elem. lui X care nu aparțin nici uneia dintre mulțimile A_i este:

$$M_2^0 = m(X) - \sum_{i=1}^{2} m(A_i) + \sum_{1\le i<j\le 2} m(A_i\cap A_j) + \dots + (-1)^2\, m\Big(\bigcap_{i=1}^{2} A_i\Big)$$

<u>Dem</u>: $M_2^0 = m\Big(\bigcap_{i=1}^{2} \bar{A}_i\Big) = m\Big(\overline{\bigcup_{i=1}^{2} A_i}\Big) = m(X) - m\Big(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\Big)$

...

<u>Aplicații</u>

1) Funcția lui Euler (mai târziu)

2) <u>Problema punctelor fixe</u>

$X=\{1,\dots,n\}$, σ perm. a mulț. X ($\sigma: X\to X$ bijectivă)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

i pct. fix al perm. σ dacă $\sigma(i)=i$

Notăm $D(n)$ nr. perm. de n obiecte fără pcte fixe.

A_i mulț. perm. care admit pe i ca pct. fix.

$|A_i| = (n-1)!$; $|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}| = (n-k)!$

Nr. perm. ce admit cel puțin un pct. fix este:

preocupări pentru matematică, 16 pentru fizică și 11 pentru

Ex2: Într-o clasă mixtă 40 elevi. Dintre aceștia, 14 au

$$M_2^p = \sum_{k=p} (-1)^{k-p} C_k^p \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le 2} m(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}).$$

<u>Obs</u>: $p=0 \Longrightarrow$ f. Sylvester (f. de tip <u>ciur</u>)

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| =$$

$$= C_n^1 (n-1)! - C_n^2 (n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^n$$

$$\Rightarrow D(n) = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! + \ldots + (-1)^n C_n^n$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Obs: 1) $D(1) = 0$; $D(n) = n D(n-1) + (-1)^n$; $!(D(0)=1)$

2) Nr. perm. de n obiecte cu p puncte fixe este $C_n^p D(n-p)$.

3) Nr. fcțiilor surjective de la o mulț. A cu m elem la o mulț. B cu n elem.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $m \ge n$

$S_i \overset{not}{=} \{f: A \to B \mid b_i \notin f(A)\}$;

$S = \{f: A \to B \mid f \text{ surj.}\}$ = mulț. fcțiilor $f: A \to B$ care nu aparțin nici unei mulț. S_i

$$\Rightarrow |S| = n^m - |S_1 \cup \ldots \cup S_n| = n^m - \sum_{i=1}^{n} |S_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |S_i \cap S_j| + \ldots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right|.$$

Dar $|S_i| = |\{f \mid f: A \to B \setminus \{b_i\}\}| = (n-1)^m$ $\quad C_n^1$

$|S_i \cap S_j| = |\{f \mid f: A \to B \setminus \{b_i, b_j\}\}| = (n-2)^m$ $\quad C_n^2$

$\vdots$

$|S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_k}| = (n-k)^m$ $\quad (1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n)$ $\quad C_n^k$

Obs: $S_1 \cap \ldots \cap S_n = \emptyset$

$$\Rightarrow |S| = n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m + \ldots + (-1)^k C_n^k (n-k)^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$$

Obs: $m = n \Rightarrow n! = n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$

$m < n \Rightarrow |S| = 0$

Notație: $|S| = s_{m,n}$

1. Fie $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ și $D(n)$ numărul permutărilor mulțimii X fără puncte fixe. Dacă $E(n)$ este numărul permutărilor pare ale mulțimii X fără puncte fixe, atunci

$$E(n) = \frac{1}{2} \left[D(n) + (-1)^{n-1}(n-1)\right].$$

(Obs: Nr. perm. pare ale mulț. X este $\frac{n!}{2}$).

2. Notăm cu $s_{m,n,r}$ numărul funcțiilor $f: X \to Y$ cu proprietatea că $Z \subseteq f(X)$, unde $|X| = m$, $|Y| = n$ și $Z \subseteq Y$, $|Z| = r$. Să se arate că:

$$s_{m,n,r} = n^m - C_r^1 (n-1)^m + C_r^2 (n-2)^m - \ldots + (-1)^r C_r^r (n-r)^m$$

3. Determinați numărul numerelor de 9 cifre distincte pe care le putem forma cu cifrele 1, 2, ..., 9 în care nu apar:

a) nici unul dintre blocurile 23, 45 și 678 ;

b) nici unul dintre blocurile 34, 45 și 738.

(*) > !!!

4. Considerăm un pătrat de latură 3 pe care îl împărțim în 9 pătrate de latură 1 ca în figură. Ne propunem să colorăm aceste pătrate (de latură 1) cu 2 culori: roșu sau albastru (fără a avea o preferință pentru una dintre culori). Care este probabilitatea de a obține o figură (desen) care nu conține nici un pătrat roșu de latură 2.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5. Prin lipirea a abc cuburi de latură 1 formăm un paralelipiped cu dimensiunile a, b, c ($\in \mathbb{N}^*$). Prin câte dintre aceste cuburi trece o diagonală a paralelipipedului obținut?

6. Fie A un alfabet format din n perechi de litere identice $a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n$, perechile diferite constând din litere diferite. Se formează toate cuvintele care folosesc cele 2n litere din alfabetul A a.i. să nu apară 2 litere identice vecine. Să se arate că numărul acestor cuvinte este:

$$\frac{1}{2^n}\left[(2n)! - C_n^1\cdot 2\cdot(2n-1)! + C_n^2\cdot 2^2(2n-2)! + \dots + (-1)^n\cdot 2^n\cdot n!\right]$$

7. În câte moduri se pot așeza 5 obiecte diferite în 3 cutii a.i. nici o cutie să nu fie goală?

9. a) În câte moduri se poate scrie un număr natural m ca o sumă de n întregi nenegativi

$$m = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

două sume fiind considerate diferite dacă ele diferă și prin ordinea termenilor? Dar dacă impunem condiția ca cei n termeni ai sumei să fie nenuli?

b) Să se găsească numărul soluțiilor întregi ale ecuației

$$a+b+c+d=17,$$

cu $1 \le a \le 3$, $2 \le b \le 4$, $3 \le c \le 5$, $4 \le d \le 6$.

(*) Înainte de pb. 4 $\longrightarrow$ Obs: X mulțime (finită), $P: \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ probabilitate dacă:

1) $0 \le P(A) \le 1$, $\forall A \subseteq X$

2) $P(X) = 1$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $\forall A, B \subseteq X$, $A \cap B = \emptyset$.

$\Longrightarrow$ $P(\emptyset) = 0$

$P(A) = \sum_{x \in A} P(\{x\})$, $\forall A \subseteq X$, A finită

$\Longrightarrow$ putem lua $m(x) = P(\{x\})$, $\forall x \in X$. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ P1 pentru P

Combinatorică și teoria numerelor

1. Să se afle numărul numerelor naturale mai mici decât 601 care nu sunt divizibile cu nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7.

2. Determinați numărul numerelor prime mai mici sau egale cu 111.

<u>Generalizare:</u> Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_k$ șirul numerelor prime $\leq [\sqrt{n}]$ și $A_{p_i} \subseteq \{2, \dots, n\}$ mulțimea multiplilor lui p_i $(i = 1, \dots, k)$. Numărul numerelor prime mai mici sau egale cu n este

$$n - 1 + k - \left| \bigcup_{i=1}^{k} A_{p_i} \right|.$$

<u>Obs</u>: $|A_{p_i}| = \left[\frac{n}{p_i}\right]$, $|A_{p_i} \cap A_{p_j}| = \left[\frac{n}{p_i p_j}\right]$, $\forall i, j, 1 \leq i < j \leq k$

$$|A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_r}}| = \left[\frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_r}}\right], \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k.$$

$\Rightarrow$ nr. căutat (folosind principiul includerii și excluderii)

3. Arătați că 97 este al 25-lea număr prim.

4. Să se determine numărul întregilor pozitivi liberi de pătrate mai mici (sau egali) cu 100.

<u>Generalizare:</u> Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_k$ nr. prime $\leq [\sqrt{n}]$ și $A_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ mult. multiplilor lui p_i^2 $(i = 1, \dots, k)$.
Numărul căutat este

$$n - \left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right|.$$

<u>Obs</u>: $|A_i| = \left[\frac{n}{p_i^2}\right]$, $|A_i \cap A_j| = \left[\frac{n}{p_i^2 p_j^2}\right]$, $1 \leq i < j \leq k$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}| = \left[\frac{n}{p_{i_1}^2 \cdots p_{i_r}^2}\right], \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k$$

<u>Funcția lui Euler</u> (mai târziu)

5. Să se determine numărul divizorilor (proprii) ai unui număr natural $n \geq 2$.

<u>Aplicație</u>: Det. nr. divizorilor proprii ai lui $441\,000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$

6. Să se arate că numărul descompunerilor unui număr natural $n \geq 2$ în produse de 2 numere naturale diferite de 1 prime între ele este $2^{k-1} - 1$, unde k este numărul divizorilor primi ai lui n.

<u>Aplicație</u>: $n = 441\,000$.

<u>Funcția lui Euler</u>

<u>Definiție</u>: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(n) =$ numărul numerelor naturale mai mici decât n, relativ prime cu n.

<u>Obs</u>: 1) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$

2) $\forall n \geq 2$, $\varphi(n) =$ numărul nr. nat. $\leq n$, relativ prime cu n

3) $p \in \mathbb{N}$ nr. prim $\iff \varphi(p) = p - 1$.

4) $p \in \mathbb{N}$ nr. prim, $\alpha \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

<u>Formula de calcul</u>: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad p_1, \dots, p_k \text{ nr. prime distincte}, \ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

<u>dem</u>: – cu princ. produsului $((a,b) = 1 \Longrightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b))$

– cu princ. includerii și excluderii.

<u>Exerciții</u>:

1. Să se determine numărul numerelor naturale mai mici decât $3528 (= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2)$ relativ prime cu acesta.

2. Să se arate că $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

3. (Mica teoremă a lui Fermat). Dacă $p \in \mathbb{N}$ este prim și $n \in \mathbb{N}$ atunci $p \mid n^p - n$.

<u>Obs</u>: Aceasta rezultă din <u>T. Euler</u>:

$$a \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}^*,\ (a,m)=1 \Longrightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

(+ câteva considerații algebrice)

4. Arătați că suma numerelor naturale relativ prime cu n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) și mai mici decât n este egală cu $\dfrac{n \cdot \varphi(n)}{2}$.