Binomul lui Newton și formula multinomului

- polinom (omogen) în n nedeterminate $\qquad \boxed{n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le k\le n}$

P: Un polinom omogen de gradul k în n nedeterminate are cel mult $\overline{C}_n^k$ termeni.

Dem: $$P(X_1,\dots,X_n)=\sum_{k_1+\dots+k_n=k} a_{k_1\dots k_n} X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}$$

Reamintim: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1}$.

P: Un polinom de gradul k în n nedeterminate are cel mult C_{n+k}^{k} termeni.

Dem I: Cu formula de recurență: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Dem II: Polinomul
$$P(X_1,\dots,X_n)=\sum_{0\le k_1+\dots+k_n\le k} a_{k_1\dots k_n} X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}$$
are același nr. maxim de termeni ca și polinomul omogen de grad k în $n+1$ nedeterminate
$$Q(X_1,\dots,X_n,X)=\sum_{k_1+\dots+k_n+k'=k} a_{k_1\dots k_n} X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n} X^{k'}$$
adică $\overline{C}_{n+1}^{k} = C_{n+k}^{k}$ termeni.

P (formula unui produs de binoame)
În produsul a n factori de forma
$$(a+b_1)(a+b_2)\dots(a+b_n),$$
coef. lui a^{n-k} este egal cu suma tuturor produselor posibile de k factori luați dintre elementele $b_1,\dots,b_n$.

Dem: inducție după n.

Obs: Coef. lui

a^n este 1

a^{n-1} — " — $b_1+\dots+b_n$

a^{n-2} — " — $b_1b_2+\dots+b_1b_n+\dots+b_{n-1}b_n$

ş.a.m.d.

T (binomul lui Newton)

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

Dem: În prop. ant. $b_1=\dots=b_n=b$

$\Rightarrow$ coef. lui a^{n-1} este $\underbrace{b^k+\dots+b^k}_{C_n^k \text{ termeni}} = C_n^k b^k$ ($\forall k \dots$)

Obs: În (unele) manuale şcolare $\rightarrow$ inducţie după n.

P (puterea unei sume / formula multinomului)

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)^m = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} P(m_1,m_2,\dots,m_n)\, x_1^{m_1} x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$$

unde $P(m_1,m_2,\dots,m_n) = \dfrac{(m_1+m_2+\dots+m_n)!}{m_1!\,m_2!\dots m_n!}$

Dem:

$$m \text{ factori} \left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2+\dots+x_n \\ x_1+x_2+\dots+x_n \\ \vdots \\ x_1+x_2+\dots+x_n \end{array} \right.$$

Nr. termeni: $\bar{A}_n^m$

– termeni asemenea cu $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ sunt $P(m_1,m_2,\dots,m_n)$.

Exemple: 1) $(a+b+c)^2 = \dots$

2) $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2) + 6abc$

Aplicaţii: $\rightarrow$ Δ-l lui Pascal

1. $C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^n=2^n$;

2. $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ (Δ combinatoric);

3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+\dots+C_{k-1}^{k-1}$.

4. $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\dots = C_n^1+C_n^3+\dots = 2^{n-1}$

Binomul lui Newton și formula multinomului – EXERCIȚII

1. Să se demonstreze că:

a) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$ (și comb.) (regula convoluției sau id. Vandermonde)

b) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right]$;

$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]$.

c) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (indicație: $\frac{n+1}{k+1}C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$)

d) $k + \frac{k^2 C_n^1}{2} + \frac{k^3 C_n^2}{3} + \ldots + \frac{k^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{(k+1)^{n+1} - 1}{n+1}$;

e) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

$C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$; (indicație: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$)

f) $1 + C_n^1 \cos\alpha + C_n^2 \cos 2\alpha + \ldots + C_n^n \cos n\alpha = 2^n \cos^n\frac{\alpha}{2} \cos\frac{n\alpha}{2}$;

$\alpha \in [0,\pi]$!

$C_n^1 \sin\alpha + C_n^2 \sin 2\alpha + \ldots + C_n^n \sin n\alpha = 2^n \cos^n\frac{\alpha}{2} \sin\frac{n\alpha}{2}$;

g) $\sum_{k=m}^{n} C_k^m C_n^k = 2^{n-m} C_n^m$ (indicație: $C_k^m C_n^k = C_n^m C_{n-m}^{n-k}$)

h) $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k = (-1)^m C_{n-1}^m$; (inducție după m)

i) $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n$, $\forall n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$.

2. Să se determine termenii din mijloc pentru următoarele dezvoltări:

a) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$; b) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^9$.

3. Să se determine:

a) termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + y)^9$ care îl conține pe x^3;

b) — " — " — " — $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ — " — " — a^4;

c) termenul în care nu apare x din dezvoltarea

$$\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$$

d) rangul termenului din dezvoltarea

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$$

în care x și y au puteri egale.

e) numărul termenilor raționali din dezvoltarea

$$(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$$

f) rangul celui mai mare termen din dezvoltarea

i) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{100}$; ii) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{100}$

g) suma coeficienților dezvoltării

$$(7x^2 - 6y^3)^9.$$

h) $n \in \mathbb{N}^*$ știind că în dezvoltarea $(1+x)^n$, coeficienții lui x^5 și x^{12} sunt egali.

i) coeficientul lui x^k din dezvoltarea

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})^2$$

4. Să se arate că:

a) $$\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_n=m} \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} = n^m;$$

b) $$\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_{2k}=m} (-1)^{m_2+m_4+\ldots+m_{2k}} \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_{2k}!} = 0;$$

c) dacă $n_1 + \ldots + n_k = n$ atunci

$$\sum_{\substack{i=1 \\ n_i \neq 0}}^{k} \frac{(n-1)!}{n_1! \ldots n_{i-1}!\,(n_i-1)!\, n_{i+1}! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}.$$

Principiul cutiei

Ex 1: Câți elevi trebuie să fie într-o clasă ca să fim siguri că numele a cel puțin 2 elevi încep cu aceeași literă? (considerăm un alfabet cu 26 litere sau 29?)

Principiul cutiei: Dacă punem $n+1$ obiecte în n cutii ($n \in \mathbb{N}^*$), atunci există cel puțin o cutie în care sunt 2 obiecte.

2.
⋮
10.

Ex 2: Într-un sertar sunt ciorapi desperecheați de 3 culori diferite (de același fel și aceeași mărime).

$\boxed{**}$ Care este numărul minim de ciorapi care trebuie scoși din sertar pentru a fi siguri că am scos:

a) o pereche; b) două perechi; c) două perechi de aceeași culoare; d) n perechi de aceeași culoare.

Generalizare: Dacă punem $kn+1$ obiecte în n cutii ($k, n \in \mathbb{N}^*$), atunci există cel puțin o cutie cu $k+1$ obiecte.

Ex 3: Un cufăr conține 20 de cămăși, 4 negre, 7 albe și 9 roșii. Câte cămăși trebuie scoase din cufăr pentru a fi siguri că am scos:

a) 4 cămăși de aceeași culoare;
b) 5 —"— —"— —"— ;
c) 6 —"— —"— —"— ;
d) 7 —"— —"— —"— ;
e) 8 —"— —"— —"— ;
f) 9 —"— —"— —"—

Pricipiul cutiei generalizat:

Presupunem că avem o mulțime M formată din a_1 obiecte de tipul 1, $a_2 \geq a_1$ obiecte de tipul 2, ..., $a_n \geq a_{n-1}$ obiecte de tipul n $(a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*)$.
Cel mai mic nr. natural m_k cu proprietatea că orice submulțime a lui M cu m_k elemente conține cel puțin $k+1$ ob. de același tip este

$$m_k = \begin{cases} k \cdot n + 1, & \text{dacă } k \leq a_1, \\ (n-1)k + 1 + a_1, & \text{dacă } a_1 < k \leq a_2, \\ (n-2)k + 1 + a_1 + a_2, & \text{dacă } a_2 < k \leq a_3, \\ \ldots \\ (n-r)k + 1 + a_1 + \ldots + a_r, & \text{dacă } a_r < k \leq a_{r+1}, \\ \ldots \\ k + 1 + a_1 + \ldots + a_{n-1}, & \text{dacă } a_{n-1} < k < a_n. \end{cases}$$

$\boxed{**}$

P1: Dacă punem cel puțin $x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n + 1$ obiecte în n cutii $1, 2, \ldots, n$, atunci există $j \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât cutia j conține cel puțin x_j obiecte.

Dem: reducere la absurd ... Ex 1

(*)

P2: Dacă punem m obiecte în n cutii $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ atunci cel puțin o cutie conține cel puțin $\left[\frac{m-1}{n}\right] + 1$ obiecte.

Dem: tot reducere la absurd ...

Exerciții:

1. Într-o urnă se găsesc bile albe, negre, roșii și albastre. Care este numărul minim de bile care ar trebui extrase (pe nevăzute) din urnă pentru a fi siguri că s-au scos (cel puțin) 6 bile albe sau 5 bile negre sau 4 bile roșii sau 3 bile albastre?

2. Fie $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Să se arate că dacă $S \subseteq X$ și $|S| = 7$ atunci există $a, b \in S$ a.i. $a+b=10$.

3. Cameleonul Zen are 11 greierași numerotați cu numere diferite, toate mai mari ca 0 și mai mici decât 22 care reprezintă greutatea lor. Explicați de ce, printre cei 11 greierași, fie există unul care are greutatea egală cu 11, fie există doi care au suma greutăților egală cu 22.

4. Să se arate că în orice grup cu cel puțin 2 persoane există (cel puțin) 2 persoane care cunosc același număr de persoane din grup.

5. Să se arate că
$$\forall X \subseteq \mathbb{Z} \text{ cu } |X| = n (\in \mathbb{N}^*), \exists S \subseteq X : n \mid \sum_{x \in S} x.$$

6. Fie $X \subseteq \mathbb{N}^*$, $|X| = 9$, $n = \max X$.
$$\forall E \subseteq X, \ s(E) \xlongequal{not} \sum_{x \in E} x.$$
Să se arate că dacă $\forall A, B \subseteq X, A \neq B, s(A) \neq s(B)$ atunci $n \geq 61$.

7. Fie 5 puncte arbitrare în interiorul unui triunghi echilateral de latură 2. Să se arate că există cel puțin 2 puncte (între acestea) între care distanța este cel mult 1.
(aceeași pb. cu 10 puncte și Δ de latură 3)

8. Dacă alegem 5 puncte în interiorul unui pătrat de latură 2, există o pereche de puncte situate la distanță cel mult $\sqrt{2}$.

9. Să se arate că printre orice 7 numere întregi distincte există 2 numere pentru care sau suma sau diferența este divizibilă cu 10.

10. Fie $X = \{1, 2, \dots, 2n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ și $S \subseteq X$ cu $|X| = n+1$. Să se arate că există 2 numere $a, b \in S$ a.i. $a | b$ sau $b | a$.

(*) Putem transporta 36 de persoane cu 7 mașini de 5 locuri (fiecare)?

11. Într-o urnă se află 36 de bile numerotate de la 1 la 36. Ion încearcă să elimine bilele din cutie în etape, fiecare etapă constând în următoarea succesiune de operații:

- Ion extrage la întâmplare 4 bile din urnă;
- Ion elimină câte 2 bile din cele 4 dacă diferența numerelor înscrise pe acestea se divide cu 3;
- Ion reintroduce în urnă bilele care nu au fost eliminate.

Să se arate că:

a) în fiecare etapă Ion elimină cel puțin 2 bile;

b) dacă în cutie rămân numai 4 bile, Ion le va elimina pe toate în ultima etapă.