Principiul sumei și principiul produsului

Ex 1: Într-o clasă sunt 18 băieți și 12 fete. În câte moduri poate fi ales un elev din această clasă?

R: $18+12=30$ moduri

Ex 2: În câte moduri poate fi ales un număr natural mai mic (strict) decât 10 astfel încât să fie prim sau par?

R: $4+5-1=8$ moduri

Principiul sumei: Dacă un eveniment E_1 se poate realiza în m_1 moduri și un (alt) eveniment E_2 se poate realiza independent (de E_1) în m_2 moduri, atunci evenimentul „se realizează unul dintre evenimentele E_1 sau E_2" se poate realiza în m_1+m_2 moduri.

Generalizare: n evenimente, 2×2 independente

Ex 3: Un raft conține 6 cărți diferite în limba engleză, 8 cărți diferite în limba franceză și 10 cărți diferite în limba română. În câte moduri:

a) se poate alege o carte în oricare dintre cele 3 limbi?

b) se pot alege 3 cărți, câte una în fiecare limbă?

c) se pot alege 2 cărți în 2 limbi diferite?

R: a) $6+8+10=24$ moduri;

b) $6\cdot 8\cdot 10=480$ moduri;

c) $6\cdot 8+8\cdot 10+6\cdot 10=188$ moduri.

Ex 4: Câte perechi de dans pot forma 10 băieţi şi 15 fete?

R: $10 \cdot 15 = 150$ perechi

Principiul produsului: Dacă un eveniment E_1 se poate realiza în m_1 moduri şi un eveniment E_2 se poate realiza independent (de E_1) în m_2 moduri atunci evenimentul "se realizează simultan E_1 şi E_2" se poate realiza în $m_1 m_2$ moduri.

Generalizare: n evenimente, E_2 indep. de E_1, E_3 de E_1 şi E_2 ş.a.m.d.

Exerciţii:

1. La o petrecere sunt 15 cupluri căsătorite. Găsiţi numărul de moduri de a alege un bărbat şi o femeie de la petrecere astfel încât: a) să fie căsătoriţi; b) să nu fie căsătoriţi.

2. Găsiţi numărul numerelor naturale de 3 cifre care: a) sunt pare;
   b) sunt impare;
   c) sunt impare şi cu cifrele distincte;
   d) —"— pare —"— —"— —"—.

3. O parolă este formată dintr-o literă (din alfabetul → englez) şi 3 sau 4 cifre. Să se determine:
26 litere
   a) numărul total de parole ce pot fi create;
   b) numărul de parole în care cifrele nu se repetă.

4. Câte dintre primele 100.000 de numere naturale nenule conţin exact o dată cifra 3, o dată cifra 4 şi o dată cifra 5?

5. Un palindrom este un şir finit de caractere care se citeşte la fel şi de la stânga la dreapta şi de la dreapta la stânga. Care este numărul numerelor de 8 cifre care sunt palindromuri în care orice cifră apare de cel mult 2 ori? Aceeaşi întrebare pt nr. de 7 cifre.

6. Să se arate că orice număr palindromic (zecimal) cu un număr par de cifre este divizibil cu 11.

7. Determinaţi cel mai mare dintre numerele obţinute ştergând 100 de cifre din numărul

$$1234\ldots 101112\ldots 99100,$$

(ale cărui cifre sunt numerele naturale de la 1 la 100 înşiruite de la stânga la dreapta).

8. Fie A, B mulţimi finite nevide, $|A| = m$, $|B| = n$. Să se arate că $|B^A| = n^m$.

Completări:

1) Câte cifre are numărul

$$15\,2\,55\ldots\,2013\underbrace{55\ldots5}_{2013}\ ?$$

2) (bit $\in \{0,1\}$, byte = octet = șir de 8 biți)

Determinați: a) nr. tuturor octeților;

b) Nr. octeților care încep cu 11 și se termină cu 11;

c) — " — " — " — și nu se — " —;

d) — " — " — " — sau se — " —.

3) În comitetul executiv al unei instituții sunt 10 membri: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Comitetul trebuie să aleagă un președinte, un secretar și un trezorier (dintre ei) fără a permite vreunui membru să cumuleze mai multe funcții. Determinați numărul de moduri în care pot fi selectați președintele, secretarul și trezorierul dacă:

a) orice membru poate ocupa aceste funcții;

b) A trebuie să fie președinte;

c) B nu vrea să fie președinte;

d) C trebuie să fie sau secretar sau trezorier;

e) sau D sau E trebuie să fie trezorier;

f) I și J nu doresc să ocupe nici una dintre funcții.

4) Determinați numărul numerelor de 5 cifre care conțin cifra 1 exact o dată.

Aranjamente, permutări, combinări

Fie $A \neq \emptyset$ o mulțime. Vorbim despre:

* sisteme ordonate finite de elemente din A;
* (sub)mulțimi ordonate finite de elem. din A;
* (sub)mulțimi finite de elem. din A.

Sisteme ordonate: $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_1, \ldots, a_k \in A$ nu neapărat diferite

→ $k=2$ perechi, $k=3$ triplete ..., k-uple

→ s.n. cuvinte cu elem. din A (cuvinte peste A)

$$a_1 a_2 \ldots a_k.$$

k lungimea cuvântului;

$a_1, \ldots, a_k$ componentele cuvântului.

→ cuvânt vid = cuvântul care (nu conține nici un elem. și) are lungimea 0.

→ $a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_\ell \iff \begin{cases} k = \ell \\ a_i = b_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, k. \end{cases}$

→ diferențele dintre mulțime și cuvânt (sistem ordonat)

	(sub)mulțime	cuvânt
ordinea elem.	nu contează	contează
elementele	distincte	pot coincide

(Sub)mulțimi ordonate: mulțimi finite de elem. din A în care elem. sunt așezate într-o anumită ordine

→ dacă punem în evidență ordinea prin numerotarea elem.

$(a_1, \ldots, a_k)$, $a_1, \ldots, a_k \in A$ diferite 2×2

= cuvinte care au componentele distincte.

Ex 1: Câte mulțimi ordonate cu câte 2 elemente se pot forma din elementele mulțimii $\{a, b, c, d\}$?

- le scriem + le numărăm. (+ le numărăm fără ca să le scriem neapărat)

Def: Fie $A \neq \emptyset$ finită, $|A| = n$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.
Submulțimile ordonate cu k elemente ale mulț. A s.n. aranjamente de n luate câte k.

Obs: a) aranjament de n luate câte k = cuvânt de lungime k cu comp. distincte din A.

b) 2 aranjamente de n luate câte k se deosebesc prin natura elementelor și ordinea lor.

Notație: A_n^k = nr. aranjamentelor de n luate câte k

Obs: a) Ex 1 $\Longrightarrow$ $A_4^2 = 12$.

b) obs ant. a) $\Longrightarrow$ $A_n^0 = 1$.

c) $A_n^1 = n$.

T: Fie $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$. Atunci $A_n^{k+1} = (n-k) A_n^k$.

Dem:

C: $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < k \leq n$.

Ex 2: În câte moduri se pot aranja 3 cărți pe un raft?
- le scriem + le numărăm (+ le numărăm ca aranjamente)

Def: Fie $A \neq \emptyset$ finită. $|A| = n$. Mulțimile ordonate ce se pot forma cu cele n elem. ale mulțimii A s.n. permutări ale mult. A (de n elemente)

Obs: a) perm. de n elem. = aranjament de n luate câte n.

b) 2 permutări de n elemente se deosebesc prin ordinea elementelor.

Notație: P_n = nr. perm. de n elem.

Obs: a) Ex 2 $\Longrightarrow$ $P_3 = 6$

b) $P_0 = 1$

T: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \overset{not}{=} n!$

Dem: temă - ind. după n
$\hookrightarrow$ la curs: $A_n^n = n!$ evident

Convenție: $0! = 1$

Ex 3: Care este numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 3 elemente?

- le scriem și le numărăm (+ le det. cu ajutorul aranjamentelor)

Def: Fie A finită, $|A| = n$, $0 \leq k \leq n$. Submulțimile lui A având fiecare câte k elemente s.n. combinări de n luate câte k.

Obs: 2 combinări de n elemente luate câte k diferă prin natura elementelor.

Notație: C_n^k = nr. comb. de n luate câte $k = \binom{n}{k}$.

Obs: a) Ex 3 $\Longrightarrow$ $C_3^2 = 3$

b) $C_n^0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $C_n^n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

T: $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$

Dem:

C: $C_n^k = \dfrac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Proprietăți: Fie $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (formula combinărilor complementare)

dem: 2 moduri

2. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

dem: prin inducție după n că

Nr. submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n.

3. $C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$ $(0 \le k < n)$

(formula de recurență pentru calculul nr. de comb.)

dem: 2 moduri

$\Longrightarrow$ Δ lui Pascal.

Aplicații

1. Fie A o mulțime nevidă și $k \in \mathbb{N}^*$.
Arătați că există o bijecție între mulțimea funcțiilor

$\{1, \dots, k\} \longrightarrow A$

și mulțimea tuturor cuvintelor de lungime k peste A. Deduceți de aici numărul cuvintelor de lungime k peste o mulțime finită A.

2. Fie A o mulțime finită, $|A| = n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < k \le n$.
a) Nr. funcțiilor injective de la $\{1, \dots, k\}$ la A este A_n^k.
b) —— " —— bijective de la $\{1, \dots, n\}$ la A este $n!$

3. Să se arate că numărul funcțiilor strict crescătoare de la $\{1, \dots, k\}$ la $\{1, \dots, n\}$ $(1 \le k \le n,\ k, n \in \mathbb{N}^*)$ este C_n^k.

Obs: $\{1, \dots, k\} \longmapsto \{a_1, \dots, a_k\}$
$\{1, \dots, n\} \longmapsto \{b_1, \dots, b_n\}$ + generalitate...

Aranjamente, permutări, combinări – EXERCIȚII

1. În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ astfel încât fiecare număr par să aibă rang par?

2. În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ $(n \in \mathbb{N}, n \ge 3)$ astfel ca numerele 1, 2, 3 să stea la rând și în ordine crescătoare?

3. În câte moduri se pot așeza pe un raft 4 cărți?

4. În câte moduri se pot așeza n persoane la o masă circulară? (Aplicație: nr. n-ciclurilor din S_n)

5. Fie A și B două mulțimi disjuncte cu m, respectiv n elemente. Să se găsească numărul de permutări ale mulțimii $A \cup B$ pentru care primul element este din A și ultimul este din B.

6. O grupă de studenți trebuie să programeze 5 examene în timp de 21 de zile. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va da în mod obligatoriu în ziua a 21-a?

7. Cei 30 elevi ai unei clase au schimbat fotografii între ei. Câte fotografii au fost necesare?

8. Care este numărul r-ciclurilor din S_n? $(n \in \mathbb{N}^*,\ r \in \mathbb{N}^*,\ 1 \le r \le n)$ – vezi pb. 4.

9. Care este numărul submatricilor de tipul (p, q) ale unei matrici de tipul (m, n)? $(m, n, p, q \in \mathbb{N}^*,\ 1 \le p \le m,\ 1 \le q \le n)$. Observație: calculul rangului...

10. În câte moduri se pot forma echipe din câte 4 elevi și un profesor dacă sunt 20 de elevi și 3 profesori?

11. La 9 clase trebuie repartizați 3 profesori de matematică, fiecăruia repartizându-i-se câte 3 clase. În câte moduri se poate face repartizarea?

12. Din 11 persoane dintre care 7 bărbați și 4 femei se formează o delegație alcătuită din 5 persoane dintre care cel puțin 2 sunt femei. În câte moduri se poate forma această delegație?

13. Care este numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi?

14. În câte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi dacă oricare trei dintre ele nu sunt concurente?

15. În plan sunt date n puncte dintre care, în afară de k puncte care sunt situate pe aceeași dreaptă, oricare 3 puncte nu sunt coliniare ($3 \leq k \leq n$).

a) Prin câte drepte se pot uni aceste puncte?

b) Câte triunghiuri diferite cu vârfurile în aceste puncte există?

Dar dacă oricare 3 dintre cele n puncte sunt necoliniare?

16. Să se determine nr. legilor de compoziție ce pot fi definite pe o mulțime cu 3 elemente. Câte dintre acestea sunt comutative? Câte legi de compoziție admit element neutru? (obs: cuvânt $\leftrightarrow$ aranjare în căsuțe ...)

Aranjamente, permutări, combinări cu repetiție

Def: 1) Fie A o mulțime finită nevidă, $|A| = n (\in \mathbb{N}^*)$ și $k \in \mathbb{N}$. Cuvintele de lungime k peste A s.n. aranjamente cu repetiție de n elemente luate câte k.

2) Dacă $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ și α este un cuvânt peste A. Tipul cuvântului α este sistemul ordonat

$$(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

unde m_i este numărul de apariții ale lui a_i în α pentru fiecare $i = 1, \dots, n$. ($m_j = 0$ dacă a_j nu apare în α)

3) Cu notațiile de mai sus, o permutare cu repetiție de tipul $(m_1, \dots, m_n)$ este un cuvânt cu elemente din A ce are acest tip.

Exemplu: $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $\alpha = a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 a_1$

α este un cuvânt de tipul $(3, 2, 1, 0)$, adică

α este o perm. cu repetiție — " — " — " —

Notații: $\bar{A}_n^k$ = nr. aranjamentelor cu repetiție de n luate câte k

$P(m_1, \dots, m_n)$ = nr. perm. cu repetiție de tipul $(m_1, \dots, m_n)$

Obs: $\bar{A}_n^k = n^k$

T: $$P(m_1, \dots, m_n) = \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)!}{m_1!\, m_2! \dots m_n!}.$$

Dem: 1) ca în Brezi & Covaci; 2) $m = m_1 + \dots + m_n$ el. se pot aranja în n cutii: m_1 – prima, m_2 – a 2-a, ⋮ în $P(m_1, \dots, m_n)$ moduri — și ca să coincidă!

C: $P(n-k, k) = C_n^k$.

Def: S.n. combinare cu repetiţie de n elem. luate câte k un sistem ordonat $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ de n numere naturale a.i. $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$.

Obs: Comb. cu repetiţie de n luate câte k = tip al unui cuvânt de lungime k cu elem. dintr-o mulţime cu n elemente (= o „colecţie" de k elem. dintre cele n în care fiecare el. apare de atâtea ori cât indică k_i – ordinea nu contează).

Notaţie: $\overline{C}_n^k$ = nr. comb. cu repetiţie de n luate câte k ! (n poate fi m. mic decât k) = nr. tipurilor diferite pe care le pot avea cuv. de lungime k cu el. din A

T: $\overline{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Dem:

C: $\overline{C}_n^k = P(k, n-1) = C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1}$.

Exerciţii:

1. Într-o tabără sportivă sunt 210 copii. Fiecare dintre ei lucrează sub îndrumarea exclusivă a unuia dintre cei 20 de antrenori şi orice 2 antrenori lucrează cu un număr diferit de copii. În câte moduri pot fi împărţiţi copiii în grupuri corespunzătoare fiecărui antrenor?

($\Longrightarrow$ altă metodă de dem a T. de la perm. cu repetiţie (adică 2))

2. În câte moduri se poate împărţi un grup de 23 de persoane în 5 grupuri de 3 persoane şi 2 grupuri de 4 persoane?

3. Considerăm cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5.

a) Câte numere pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare o singură dată? Câte dintre acestea sunt pare?

b) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare o singură dată? Câte dintre acestea sunt pare?

c) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră este strict mai mică (respectiv mai mare) decât precedenta? Câte dintre acestea sunt pare?

d) Câte numere de 8 cifre pot fi formate cu acestea? Câte dintre ele sunt pare?

e) Câte numere pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare de 2 ori? Câte dintre acestea sunt pare?

f) Câte numere de 20 de cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră este cel mult egală cu cifra care îl precede (succede)? Câte dintre acestea sunt pare?

+ $C_k^m C_n^k = C_n^m C_{n-m}^{n-k}$, $0 \le m \le k \le n$

$(= C_n^m C_{n-m}^{k-m})$