LISTA 9

1) Fie M o mulţime şi $\mathcal{P}(M)$ mulţimea submulţimilor lui M. Definim pe $\mathcal{P}(M)$ două operaţii $+$ şi $\cdot$ astfel:

$$X + Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \text{ şi } X \cdot Y = X \cap Y.$$

Să se arate că:
i) $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este inel asociativ, comutativ, cu unitate;
ii) dacă $|M| \geq 2$ atunci orice $X \in \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset, M\}$ este divizor al lui zero;
iii) $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este corp dacă şi numai dacă $|M| = 1$.

2) Să se arate că într-un inel cu unitate, comutativitatea adunării este o consecinţă a celorlalte axiome.

3) Să se dea exemplu de inel finit necomutativ.

4) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel asociativ şi $a, b \in R$. Să se arate că:
a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow ab = ba \Leftrightarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
b) dacă $ab = ba$ atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned}(a + b)^n =& C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n;\\ a^n - b^n =& (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + a b^{n-2} + b^{n-1}\right);\\ a^{2n+1} + b^{2n+1} =& (a + b)\left(a^{2n} - a^{2n-1} b + \cdots - a b^{2n-1} + b^{2n}\right).\end{aligned}$$

5) Să se arate că dacă într-un inel asociativ cu unitate $(R, +, \cdot)$ avem $x^3 = x$ pentru orice $x \in R$ atunci inelul R este comutativ.

6) Să se arate că dacă într-un inel asociativ $(R, +, \cdot)$ avem $x^6 = x$ pentru orice $x \in R$ atunci $x^2 = x$ pentru orice $x \in R$.

7) Fie $R = \{0, 1, a, b\}$ un inel asociativ în care 0 este elementul nul şi 1 elementul unitate. Să se arate că:
i) funcţia $f : R \to R$, $f(x) = 1 + x$ este bijectivă;
ii) $\displaystyle\sum_{x \in R} f(x) = 1 + a + b$ şi $1 + 1 + 1 + 1 = 0$;
iii) dacă R este corp atunci $1 + 1 = 0$;
iv) R este corp dacă şi numai dacă există $x \in R$ astfel încât $1 + x = x^2$.

8) Un inel $(R, +, \cdot)$ se numeşte *inel Boole* dacă orice element din R este idempotent (adică $x^2 = x$ pentru orice $x \in R$). Fie $(R, +, \cdot)$ un inel Boole. Să se arate că:
i) $x + x = 0$ pentru orice $x \in R$;
ii) $(R, +, \cdot)$ este un inel comutativ;
iii) R nu conţine divizori ai lui zero dacă şi numai dacă $R = \{0\}$ sau $|R| = 2$;
iv) $(R, +, \cdot)$ este corp dacă şi numai dacă este cu unitate şi $|R| = 2$.

9) a) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel asociativ finit, cu unitate şi $a \in R$, $a \neq 0$. Să se arate că a este inversabil dacă şi numai dacă a nu este divizor al lui zero.
b) Să se arate că orice domeniu de integritate finit este corp.

10) În $\mathbb{Z}_{12}$, să se determine divizorii lui zero şi să se rezolve:

a) ecuaţiile $\widehat{4}x+\widehat{5}=\widehat{9}$ şi $\widehat{5}x+\widehat{5}=\widehat{9}$,

b) sistemul $\begin{cases} \widehat{3}x+\widehat{4}y=\widehat{11} \\ \widehat{4}x+\widehat{9}y=\widehat{10} \end{cases}$.