LISTA 8

1) Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

din grupul $GL_n(\mathbb{Z})$. Să se determine comutatorii $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$.

2) Fie $(G, \cdot)$ un grup, $Z(G)$ centrul său şi G' subgrupul său derivat. Să se arate că:
i) pentru orice $x, y \in G$ au loc egalităţile:

$$xy = yx[x, y],\ [x, y]^{-1} = [y, x],\ [x, y^{-1}] = y[y, x]y^{-1},\ [x^{-1}, y] = x[y, x]x^{-1},$$
$$[xy, z] = y^{-1}[x, z]y[y, z],\ [x, yz] = [x, z]z^{-1}[x, y]z;$$

ii) dacă $x, y \in G$ atunci $[x, y] = 1$ dacă şi numai dacă $xy = yx$;
iii) $x \in Z(G) \Leftrightarrow \forall y \in G,\ [x, y] = 1$;
iv) G este abelian dacă şi numai dacă $G' = \{1\}$.

3) Să se demonstreze că

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

este un subgrup al lui $GL_3(\mathbb{Z})$ şi că subgrupul comutator al lui G coincide cu $Z(G)$.

4) Fie $(G, \cdot)$ un grup, $N \leq G$ şi $N_1, N_2 \trianglelefteq G$. Să se arate că:
a) $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow [N, G] \subseteq N$.
b) $[N_1, N_2] \subseteq N_1 \cap N_2$.

5) Să se determine subgrupul derivat al: i) grupului cuaternionilor; ii) grupului simetric $(S_3, \circ)$; iii) grupului simetric $(S_n, \circ)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

6) Să se determine subgrupurile Sylow ale grupului simetric $(S_4, \circ)$.

7) Să se determine toate grupurile neizomorfe de ordinul 15.

8) Fie p, q numere prime. Să se arate dacă $(G, \cdot)$ este un grup de ordinul pq atunci G nu este simplu. Mai mult, dacă $p \neq q$, $p - 1$ nu se divide prin q şi $q - 1$ nu se divide prin p atunci $(G, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_{pq}, +)$.

9) Fie p, q numere prime, $p \neq q$. Să se arate dacă $(G, \cdot)$ este un grup de ordinul p^2q atunci G nu este simplu. Mai mult, dacă $p^2 - 1$ nu se divide prin q şi $q - 1$ nu se divide prin p atunci G este abelian.

10) Arătaţi că orice grup de ordinul 255 este ciclic.