LISTA 7

1) a) Să se arate că, abstracţie făcând de un izomorfism, există un singur grup neciclic de ordinul 4 (grupul lui Klein).
b) Să se determine toate grupurile neizomorfe de ordinele $1, 2, 3, 4$ şi 5.

2) Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că:
i) dacă toate elementele din $G \setminus \{1\}$ au ordinul 2 atunci G este abelian;
ii) dacă G este finit şi orice element din $G \setminus \{1\}$ are ordinul 2 atunci ordinul lui G este de forma 2^k, cu $k \in \mathbb{N}$.

3) Să se arate că orice grup de ordinul 6 este izomorf cu $(\mathbb{Z}_6, +)$ sau cu grupul simetric $(S_3, \circ)$.

4) Să se arate că rotaţiile şi simetriile unui triunghi echilateral formează un grup $(\Delta_3, \circ)$ izomorf cu grupul simetric $(S_3, \circ)$.

5) Fie P_n un poligon regulat cu n laturi ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$). Să se arate că izometriile f ale planului care au proprietatea că $f(P_n) = P_n$ formează un grup $(\Delta_n, \circ)$ (numit *grupul diedral de grad* n) şi că ordinul acestui grup este $2n$. (Amintim că o transformare geometrică f a planului se numeşte *izometrie* dacă păstrează distanţa dintre orice două puncte, adică pentru orice puncte M, N din plan avem $MN = f(M)f(N)$.)

6) a) Fie p un număr prim impar. Să se arate că orice grup de ordinul $2p$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_{2p}, +)$ sau cu grupul diedral $(\Delta_p, \circ)$.
b) Să se determine toate grupurile neizomorfe de ordinul 10.

7) Să se determine toate grupurile neizomorfe de ordinul 8.

8) Să se arate că centrul unui grup $(G, \cdot)$ al cărui ordin este de forma p^k, cu p prim şi $k \in \mathbb{N}^*$, este diferit de $\{1\}$.

9) a) Să se arate că pentru orice număr prim p există numai două grupuri neizomorfe de ordinul p^2.
b) Să se determine toate grupurile neizomorfe de ordinul 9.

10) Fie $(G, \cdot)$ un grup necomutativ de ordinul p^3 cu p număr prim. Să se arate că $|Z(G)| = p$ şi că grupul cât $G/Z(G)$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.