LISTA 6

1) Fie $n, l \in \mathbb{N}$, $n \geq l \geq 2$. Să se determine:
i) numărul transpoziţiilor din S_n;
ii) numărul ciclurilor de lungime n din S_n;
iii) numărul ciclurilor de lungime l din S_n;
iv) numărul tuturor ciclurilor (de lungime cel puţin 2) din S_n.

2) Spunem că două *permutări* $f, g \in S_M$ ale unei mulţimi M sunt *disjuncte* dacă pentru orice $x \in M$ are loc cel puţin una dintre egalităţile $f(x) = x$, $g(x) = x$. Să se arată că:
a) dacă $f, g \in S_M$ sunt permutări disjuncte atunci $f \circ g = g \circ f$;
b) două cicluri $(i_1\, i_2\, \ldots\, i_l)$, $(j_1\, j_2\, \ldots\, j_k)$ din S_n $(n \in \mathbb{N})$ sunt disjuncte dacă şi numai dacă mulţimile $\{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$, $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ sunt disjuncte.

3) a) Să se descompună în produs de cicluri disjuncte permutarea

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 12 & 8 & 11 & 6 & 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Să se scrie în două moduri ca produs de transpoziţii permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $2 \leq l \leq n$ şi $\sigma = (i_1\, i_2\, \ldots\, i_l) \in S_n$. Să se arate că:
a) $\sigma^{-1} = (i_l\, i_{l-1}\, \ldots\, i_1) = \sigma^{l-1}$;
b) l este cel mai mic număr natural nenul pentru care σ^l este permutarea identică (adică ordinul lui σ este l);
c) $\sigma^m(i_j) = \begin{cases} i_{j+m} & , \text{ dacă } j+m < l \\ i_{j+m-l} & , \text{ dacă } j+m > l \end{cases}$ $\quad (m \in \mathbb{N}^*)$.

5) a) Fie $\gamma = (i_1\, i_2\, \ldots\, i_k) \in S_n$. Să se arate că pentru orice $\sigma \in S_n$ avem

$$\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\, \sigma(i_2)\, \ldots\, \sigma(i_k)).$$

b) Fie $\sigma_1 = (1\,2\,3) \circ (4\,5\,6\,7)$, $\sigma_2 = (3\,4) \circ (5\,2\,6\,1\,8)$, $\sigma_3 = (1\,3\,4) \circ (2\,3\,5\,7) \circ (1\,8\,4\,6)$, $\sigma_4 = (8\,2\,1\,4\,3) \circ (1\,2) \circ (1\,5)$ şi $\sigma_5 = (8\,7\,4\,3\,1\,2) \circ (5\,6)$ permutări din S_8. Să se determine $\sigma_1 \circ \sigma_4 \circ \sigma_1^{-1}$, $\sigma_5^{-2} \circ \sigma_3 \circ \sigma_5^2$, $\sigma_2^{-5} \circ \sigma_4 \circ \sigma_2^5$.
c) Fie $\sigma_1 = (1\,2\,3) \circ (4\,5\,6) \circ (7\,8\,9)$, $\sigma_2 = (1\,4\,7) \circ (2\,5\,8) \circ (3\,6\,9)$, $\sigma_3 = (4\,5\,6) \circ (7\,8\,9)$. Să se arate că $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ şi $\sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_1$.

6) Să se găsească elementele din grupul $(S_n, \circ)$ permutabile cu ciclul $(i_1\, i_2\, \ldots\, i_n) \in S_n$.

7) Să se arate că fiecare din următoarele mulţimi constituie un sistem de generatori pentru grupul simetric $(S_n, \circ)$:
a) $\{(i\, j) \mid i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j\}$ (mulţimea transpoziţiilor din S_n);
b) $\{(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\ n)\}$;
c) $\{(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\ n)\}$;
d) $\{(i_1\, i_2), (i_1\, i_2\, \ldots\, i_n)\}$, unde $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$;
e) $\{(i_1\, i_2), (j_1\, j_2\, \ldots\, j_n)\}$, unde $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

8) Să se arate că fiecare din următoarele mulţimi constituie un sistem de generatori pentru *grupul altern* A_n (grupul permutărilor pare de grad n):
a) mulţimea tuturor ciclurilor de lungime 3;
b) $\{(1\,2\,3), (1\,2\,4), \ldots, (1\ 2\ n)\}$.

9) Să se descompună grupurile S_3 şi S_4 în clase de elemente conjugate.

10) Să se arate că permutările

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

sunt conjugate în S_6 şi să se determine numărul permutărilor $\sigma \in S_6$ pentru care are loc egalitatea $\sigma^{-1} \circ \alpha \circ \sigma = \beta$.