LISTA 5

1) Fie $(G_1, \cdot)$, $(G_2, *)$ două grupuri şi e_1, respectiv e_2 elementele lor neutre. Să se arate că grupurile cât $(G_1/G_1, \cdot)$ şi $(G_2/G_2, *)$ sunt izomorfe. Când sunt izomorfe grupurile $(G_1/\{e_1\}, \cdot)$ şi $(G_2/\{e_2\}, *)$?

2) Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Să se arate că $SL_n(K)$ este un subgrup normal al lui $(GL_n(K), \cdot)$ şi că grupul cât $(GL_n(K)/SL_n(K), \cdot)$ este izomorf cu $(K^*, \cdot)$. Ce se întâmplă pentru $K = \mathbb{Z}$?

3) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că mulţimea A_n a permutărilor pare de grad n este un subgrup normal al grupului simetric $(S_n, \circ)$ (numit *grupul altern de grad* n) şi că grupul factor $(S_n/A_n, \circ)$ este izomorf cu grupul $(U_2, \cdot)$ al rădăcinilor de ordinul 2 ale unităţii.

4) Fie $U_2 = \{-1, 1\}$ grupul rădăcinilor de ordinul 2 ale unităţii. Să se arate că au loc următoarele izomorfisme de grupuri: a) $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}, +)$; b) $(\mathbb{Q}^*/U_2, \cdot) \simeq (\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$; c) $(\mathbb{R}^*/U_2, \cdot) \simeq (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$.

5) Fie $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Să se arate că $H \trianglelefteq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi că au loc izomorfismele: i) $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \simeq (H, \cdot)$; ii) $(\mathbb{C}^*/H, \cdot) \simeq (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$; iii) $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*_+, \cdot) \simeq (H, \cdot)$.

6) Fie $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : \; z^n = 1\}$. Să se arate că U este subgrup în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi că $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +) \simeq (U, \cdot)$.

7) Fie funcţiile

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_{a,b}(x) = ax + b \; (a, b \in \mathbb{R}),$$

$S_\mathbb{R}$ mulţimea permutărilor lui $\mathbb{R}$ şi

$$G = \{f_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}^*, \; b \in \mathbb{R}\}, \; H = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{R}^*\}, \; N = \{f_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

i) Să se arate că G este subgrup al grupului $(S_\mathbb{R}, \circ)$. Este G subgrup normal în $S_\mathbb{R}$?
ii) Să se arate că H este subgrup al grupului $(G, \circ)$. Este H subgrup normal în G?
iii) Să se arate că $N \trianglelefteq (G, \circ)$ şi $(G/N, \circ) \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$.
iv) Este N subgrup normal şi în $(S_\mathbb{R}, \circ)$?

8) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi N un subgrup al său. Să se arate că dacă descompunerea lui G în raport cu N la stânga are un sistem de reprezentanţi H care este subgrup atunci:
i) H este un sistem de reprezentanţi şi pentru descompunerea la dreapta;
ii) $H \cap N = \{1\}, \; HN = G = NH$;
iii) orice $g \in G$ are o reprezentare unică de forma $g = hn$ cu $h \in H$, $n \in N$;
iv) N este normal în G şi grupul $(G/N, \cdot)$ este izomorf cu $(H, \cdot)$.

9) Fie $K = \{e, (1\,2) \circ (3\,4), (1\,3) \circ (2\,4), (1\,4) \circ (2\,3)\}$, unde e este permutarea identică din S_4. Să se arate că:
a) submulţimea K formează un subgrup comutativ al lui S_4 izomorf cu grupul lui Klein;
b) K este un subgrup normal al lui S_4 şi $(S_4/K, \circ) \simeq (S_3, \circ)$;
c) $(A_4/K, \circ) \simeq (\mathbb{Z}_3, +)$.