LISTA 4

1) Fie $(G,\cdot)$ un grup şi H_1, H_2 subgrupuri ale lui G. Să se arate că:
i) $H_1 \cdot H_2$ este un subgrup dacă şi numai dacă $H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1$;
ii) dacă $H_1 \trianglelefteq G$ şi $H_2 \trianglelefteq G$ atunci $H_1 \cdot H_2 \trianglelefteq G$.

2) Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $X \subseteq G$. Să se arate că:
i) subgrupul $\langle X \rangle$ generat de X este comutativ dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in X$ avem $xy = yx$;
ii) dacă pentru orice $x \in X$ şi orice $g \in G$ avem $g^{-1}xg \in X$ atunci $\langle X \rangle \trianglelefteq G$;
iii) dacă $X = X_1 \cup X_2$ şi pentru orice $x_1 \in X_1$ şi $x_2 \in X_2$ avem $x_1x_2 = x_2x_1$ atunci $\langle X \rangle = \langle X_1 \rangle \cdot \langle X_2 \rangle$;
iv) dacă $X = X_1 \cup X_2$ şi $X_1X_2 = X_2X_1$ atunci $\langle X \rangle = \langle X_1 \rangle \cdot \langle X_2 \rangle$.

3) Fie $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ şi $\cdot$ operaţia definită în G astfel:

$$(m_1, m_2, m_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} (m_1 + n_1, m_2 + n_2, n_3), & \text{dacă } m_3 = 1\,; \\ (m_1 + n_1, m_2 + n_2, -n_3), & \text{dacă } m_3 = -1\,. \end{cases}$$

Să se arate că:
i) $(G,\cdot)$ este un grup;
ii) subgrupul $H_1 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$ este normal în G;
iii) subgrupul $H_2 = \langle (1, 0, 1) \rangle$ este normal în H_1, dar nu este normal în G.

4) Să se determine:
i) ordinul fiecărui element din S_3;
ii) subgrupurile lui S_3;
iii) subgrupurile normale ale lui S_3;
iv) grupurile cât ale lui S_3.

5) Un grup necomutativ care are toate subgrupurile normale se numeşte *grup hamiltonian*. Fie $(H,\cdot)$ grupul cuaternionilor. Să se arate că:
i) $(H,\cdot)$ este grup hamiltonian;
ii) pentru orice $x, y \in H$ avem $x^2y^2 = y^2x^2$, deşi $(H,\cdot)$ nu este comutativ;
iii) dacă $a, b \in \{i, j, k\}$, $a \neq b$ atunci $H = \langle a, b \rangle$ şi $a^4 = 1 = b^4$, $a^2 = b^2$, $aba = a$ iar din aceste egalităţi să se deducă egalităţile: $aba = a$, $a^3b = ba$ şi $b^3a = ab$.

6) Fie $(G,\cdot)$ un grup necomutativ şi $Z(G)$ centrul său. Să se arate că grupul cât $(G/Z(G),\cdot)$ nu este ciclic.

7) Să se determine subgrupurile şi grupurile cât ale lui: a) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$; b) $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

8) Fie U_6 muţimea rădăcinilor de ordinul 6 ale unităţii. Să se determine subgrupurile şi grupurile cât ale lui $(U_6,\cdot)$.

9) Să se arate că:
i) există o funcţie bijectivă între mulţimea suport a grupului cât $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ şi mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < 1\}$;
ii) grupul $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ este cu torsiune şi $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
iii) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ grupul $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ are un singur subgrup de ordin n, iar acest subgrup este ciclic.