LISTA 3

1) Să se arate că dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit de ordin par atunci există cel puţin un element $x \in G \setminus \{1\}$ astfel încât $x^{-1} = x$ (adică x are ordinul 2).

2) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$. Să se arate că $\mathrm{ord}(xy) = \mathrm{ord}(yx)$.

3) Fie $(G, \cdot)$, $(G', \cdot)$ două grupuri, $x \in G$ şi $f : G \to G'$ un omomorfism. Să se arate că:
i) dacă $x \in G$ şi ordinul lui x este finit atunci ordinul lui $f(x)$ este finit şi $\mathrm{ord} f(x)$ divide $\mathrm{ord}(x)$;
ii) dacă f este injectiv şi $x \in G$ atunci $\mathrm{ord} f(x) = \mathrm{ord}\, x$;
iii) dacă $\mathrm{ord} f(x) = \mathrm{ord}\, x$ pentru orice $x \in G$ atunci omomorfismul f este injectiv.

4) Fie $(G, \cdot)$ şi $(G', \cdot)$ două grupuri abeliene. Să se arate că:
i) dacă G şi G' sunt izomorfe atunci $t(G)$ şi $t(G')$ sunt izomorfe;
ii) este posibil ca $t(G)$ şi $t(G')$ să fie izomorfe fără ca G şi G' să fie izomorfe.

5) Să se arate că grupurile : i) $(\mathbb{Q}, +)$ şi $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$; ii) $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{R}^*, \cdot)$; iii) $(\mathbb{C}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; iv) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

6) Să se determine omomorfismele lui $(\mathbb{Z}_6, +)$ în $(\mathbb{Z}_3, +)$ şi ale lui $(\mathbb{Z}_3, +)$ în $(\mathbb{Z}_9, +)$.

7) Să se arate că mulţimea subgrupurilor unui grup infinit este infinită.

8) Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că:
i) G are un singur element de ordinul 1;
ii) pentru orice $x \in G$ avem $\mathrm{ord} x = \mathrm{ord}\, x^{-1}$;
iii) dacă $x \in G$, $n = \mathrm{ord}\, x$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ atunci $\mathrm{ord}(x^k) = \dfrac{n}{(k, n)}$, unde (k, n) este c.m.m.d.c. al lui k şi n;
iv) dacă $n = \mathrm{ord} x$ şi $n = km$ atunci $\mathrm{ord}(x^k) = m$;
v) dacă $(G, \cdot)$ este un grup ciclic de ordin $n \in \mathbb{N}^*$, generat de x, atunci x^k este un generator pentru G dacă şi numai dacă $(k, n) = 1$.

9) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$ cu proprietatea că $xy = yx$. Fie $m = \mathrm{ord}\, x$, $n = \mathrm{ord}\, y$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:
i) $\mathrm{ord}(xy)$ e finit şi $\mathrm{ord}(xy)$ divide pe $[m, n]$ (unde $[m, n]$ este c.m.m.m.c. al lui m şi n);
ii) dacă $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$ atunci $\mathrm{ord}(xy) = [m, n]$;
iii) dacă $(m, n) = 1$ atunci $\mathrm{ord}(xy) = mn$ şi $\langle x, y \rangle = \langle xy \rangle$;
iv) există în G (chiar şi numai în ipoteza iniţială) un element de ordinul $[m, n]$.

10) Să se arate că produsul direct a două grupuri ciclice, fiecare de ordin cel puţin 2, este un grup ciclic dacă şi numai dacă grupurile sunt finite şi ordinele lor sunt relativ prime.