LISTA 2

1) Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că reuniunea a două subgrupuri ale lui $(G, \cdot)$ este un subgrup al lui $(G, \cdot)$ dacă şi numai dacă unul dintre ele este inclus în celălalt. Să se deducă de aici că G nu poate fi scris $G = H_1 \cup H_2$ unde H_1 şi H_2 sunt subgrupuri ale lui G diferite de G.

2) Fie M o mulţime. Să se arate că dacă $|M| \geq 3$ atunci centrul grupului $(S_M, \circ)$ al permutărilor lui M este format doar din funcţia identică.

3) Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ şi $M_n(K)$ mulţimea matricelor pătrate de ordinul n cu elemente din K, iar

$$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\},\ SL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}.$$

Să se arate că:
i) $(M_n(K), \cdot)$ este un monoid necomutativ pentru $n > 1$. Este $(M_n(K), \cdot)$ grup?
ii) $GL_n(K)$ este o parte stabilă a lui $(M_n(K), \cdot)$ şi $(GL_n(K), \cdot)$ este un grup numit *grupul general liniar* de gradul n peste K.
iii) $(GL_n(K), \cdot)$ are (pentru $n \geq 1$) un subgrup izomorf cu $(K^*, \cdot)$.
iv) $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ are un subgrup izomorf cu $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
v) $SL_n(K)$ este un subgrup al lui $GL_n(K)$.

4) Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ şi $GL_n(K)$ grupul general liniar de gradul n peste K. Să se arate că $Z(GL_n(K)) = \{aI_n \mid a \in K^*\}$, unde $Z(GL_n(K))$ este centrul grupului $GL_n(K)$, iar I_n este matricea unitate.

5) Fie $GL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{-1, 1\}\}$ şi $SL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{Q}) \mid \det A = 1\}$. Să se arate că:
i) $GL_n(\mathbb{Z})$ este un subgrup al lui $(GL_n(\mathbb{Q}), \cdot)$;
ii) grupul $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$ este infinit dacă $n > 1$;
iii) subgrupul lui $(GL_2(\mathbb{Z}), \cdot)$ generat de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}, +)$;
iv) $SL_n(\mathbb{Z})$ este un subgrup al lui $GL_n(\mathbb{Z})$.

6) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că grupul $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$ are un subgrup izomorf cu grupul $(S_n, \circ)$ al permutărilor unei mulţimi cu n elemente, adică $(S_n, \circ)$ se scufundă izomorf în $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$.

7) Fie $n \in \mathbb{Z}$ şi $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că:
i) $n\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$;
ii) $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $m|n$ (m divide pe n);
iii) pentru orice subgrup H al lui $(\mathbb{Z}, +)$ există un unic $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $H = n\mathbb{Z}$;
iv) grupul $(\mathbb{Z}, +)$ este izomorf cu orice subgrup al său diferit de $\{0\}$;
v) $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$ şi $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n)\mathbb{Z}$ (unde (m, n) şi $[m, n]$ sunt c.m.m.d.c., respectiv c.m.m.m.c. al lui m şi n).

8) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $U_n = \{\varepsilon \mid \varepsilon^n = 1\}$. Să se arate că U_n este un subgrup ciclic al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ (numit *grupul rădăcinilor de ordinul n ale unităţii*) şi că orice grup ciclic de ordinul n este izomorf cu $(U_n, \cdot)$.

9) Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că în $(GL_2(\mathbb{Z}), \cdot)$ avem $\mathrm{ord}A = 4$, $\mathrm{ord}B = 3$ şi $\mathrm{ord}(AB) = \infty$.

10) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $t(G) = \{x \in G \mid \mathrm{ord}x < \infty\}$. Să se arate că:
i) dacă $(G, \cdot)$ este abelian atunci $t(G)$ este un subgrup al lui G (numit *partea de torsiune* a lui G);
ii) dacă $(G, \cdot)$ este necomutativ atunci $t(G)$ nu este, în general, un subgrup în G;
iii) $(G \setminus t(G)) \cup \{1\}$ nu este, în general, subgrup (nici chiar în caz abelian);
iv) dacă $\emptyset \neq H \subseteq t(G)$ atunci H este un subgrup în G dacă şi numai dacă

$$(*) \qquad h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H;$$

v) dacă $(G, \cdot)$ este finit şi $\emptyset \neq H \subseteq G$ atunci H este un subgrup în G dacă şi numai dacă verifică pe $(*)$.