LISTA 14

1) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel asociativ, comutativ, cu unitate. Să se arate că un polinom $f \neq 0$ e divizor al lui zero în $R[X]$ dacă şi numai dacă există $a \in R$, $a \neq 0$ astfel încât $af = 0$.

2) a) Să se arate că ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ are o infinitate de soluţii în corpul cuaternionilor.
b) Există polinoame nenule cu coeficienţi într-un inel asociativ, comutativ, cu unitate pentru care numărul rădăcinilor depăşeşte gradul? Justificaţi răspunsul.

3) i) Să se determine rădăcinile polinomului $aX^2 + bX + c$ $(a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$.
ii) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţiile: a) $x^2 + (2 - i)x - i = 0$; b) $y^2 + i\sqrt{6}y - 3 = 0$; c) $x^2 + \sqrt{3}x + i = 0$.

4) a) Fie $p, q \in \mathbb{C}$. Să se găsească două numere $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $\alpha + \beta$ să fie o soluţie a ecuaţiei $y^3 + py + q = 0$.
b) Să se determine rădăcinile polinomului $aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$, $a \neq 0$.
c) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţiile: i) $x^3 - 3x - 4 = 0$; ii) $x^3 + 6x^2 + 18x + 27 = 0$.

5) a) Fie $p, q, r \in \mathbb{C}$ şi $h = X^4 + pX^2 + qX + r$. Să se determine $m \in \mathbb{C}$ astfel încât $h = f^2 - g^2$ unde $f = X^2 + \dfrac{p}{2} + m$ şi $g \in \mathbb{C}[X]$.
b) Să se deducă, folosind a), o metodă de rezolvare a ecuaţiei

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,\ \ a, b, c, d, e \in \mathbb{C},\ \ a \neq 0.$$

c) Să se determine rădăcinile polinomului $X^4 + 6X^2 + 6i\sqrt{6}X - 9 \in \mathbb{C}[X]$.

6) Să se dea exemple de inele asociative, comutative, cu unitate R pentru care omomorfismul $\varphi : R[X] \to R^R$, $\varphi(f) = \widetilde{f}$ (unde $\widetilde{f}$ este funcţia polinomială deteminată de f) nu este: a) injectiv; b) surjectiv.

7) a) Fie $(R, +, \cdot)$ un domeniu de integritate infinit şi $f, g \in R[X]$. Să se arate că $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ dacă şi numai dacă $f = g$ (ceea ce permite aplicarea metodei coeficienţilor nedeterminaţi în cazul funcţiilor polinomiale definite pe domenii de integritate infinite, de exemplu pe $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).
b) Fie $(R, +, \cdot)$ un domeniu de integritate finit cu n elemente, $R = \{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $f, g \in R[X]$. Să se arate că $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ dacă şi numai dacă $(X - a_1) \cdots (X - a_n) \mid (f - g)$.

8) Fie $f = X^3 + \widehat{2}X^2 + X + \widehat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$. Care sunt polinoamele de grad cel mult 3 din $\mathbb{Z}_3[X]$ care definesc aceeaşi funcţie polinomială ca şi f? Dar cele de grad cel mult 4?

9) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel asociativ, comutativ, cu unitate. Să se arate că omomorfismul φ din problema 6) este surjectiv dacă şi numai dacă $R = \{0\}$ sau R este un corp finit.

10) Fie $(R, +, \cdot)$ un domeniu de integritate. Să se arate că:
a) dacă φ este un endomorfism surjectiv al lui $R[X]$ cu proprietatea că

$$\varphi(r) = r,\ \forall r \in R$$

atunci există $a, b \in R$ astfel încât $\varphi = E_{aX+b}$ (amintim că $E_{aX+b}(f) = f(aX + b)$);
b) dacă $a, b \in R$ atunci E_{aX+b} este automorfism al lui $R[X]$ dacă şi numai dacă a este inversabil.