LISTA 12

1) Să se determine idealele subinelelor lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

2) a) Să se arate că într-un inel asociativ şi comutativ elementele nilpotente formează un ideal.
b) Să se arate că într-un inel asociativ, comutativ, cu unitate suma unui element inversabil cu un element nilpotent este un element inversabil.

3) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel Boole nenul. Să se arate că:
i) R este inel simplu dacă şi numai dacă R este izomorf cu inelul $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$;
ii) orice ideal al lui R generat de o submulţime finită este principal.

4) a) Fie $(R_1, +, \cdot)$ şi $(R_2, +, \cdot)$ două inele cu unitate. Să se determine idealele produsului direct $(R_1 \times R_2, +, \cdot)$ al celor două inele.
b) Să se determine idealele inelului $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ şi al inelului $(K \times K, +, \cdot)$ (unde $(K, +, \cdot)$ este un corp).

5) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi $(M_n(R), +, \cdot)$ inelul matricelor pătrate cu elemente din R. Să se arate că:
a) matricele triunghiulare (adică matricele $A = (a_{ij})$, cu $a_{ij} = 0$ pentru orice $i > j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$) formează un subinel necomutativ T al lui $(M_n(R), +, \cdot)$;
b) $U = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0,\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \geq j\}$ este un ideal al lui T;
c) inelul cât T/U este comutativ.

6) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu unitate şi $(M_n(R), +, \cdot)$ inelul matricelor pătrate cu elemente din R. Să se arate că dacă $\mathcal{U}$ este un ideal al lui $(M_n(R), +, \cdot)$ şi $A \in \mathcal{U}$ atunci permutând două linii (coloane) ale lui A, înmulţind o linie (coloană) a lui A cu un element din R sau adunând la o linie (coloană) a lui A o altă linie (coloană) a lui A înmulţită cu un element din R obţinem tot o matrice din $\mathcal{U}$.

7) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu unitate şi $(M_n(R), +, \cdot)$ inelul matricelor pătrate cu elemente din R. Să se arate că:
i) orice ideal al lui $M_n(R)$ este de forma $M_n(U)$, unde U este un ideal al lui R;
ii) dacă U este ideal în R, inelele $M_n(R)/M_n(U)$ şi $M_n(R/U)$ sunt izomorfe;
iii) dacă R este un inel simplu atunci $M_n(R)$ este un inel simplu;
iv) dacă R este un corp atunci $M_n(R)$ este un inel simplu.

8) Fie M o mulţime, $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ inelul definit de operaţiile

$$X + Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \text{ şi } X \cdot Y = X \cap Y$$

şi $N \subseteq M$. Să se arate că:
i) inelele $(\mathcal{P}(M \setminus N), +, \cdot)$ şi $(\mathcal{P}(M)/\mathcal{P}(N), +, \cdot)$ sunt izomorfe;
ii) dacă M este finită, orice ideal al lui $\mathcal{P}(M)$ este de forma $\mathcal{P}(N)$ cu $N \subseteq M$;
iii) dacă M este infinită atunci ii) nu are loc. izomorfe.

9) Să se arate că dacă $f : R \to R'$ este un omomorfism surjectiv de inele şi U este un ideal al lui R care include pe $\operatorname{Ker} f$ atunci inelele cât R/U şi $R'/f(U)$ sunt izomorfe.