LISTA 11

1) Fie $(R,+,\cdot)$ şi $(R',+,\cdot)$ două inele şi $f : R \to R'$ un omomorfism de inele.
a) Să se arate că a idempotent în R implică $f(a)$ idempotent în R'.
b) Dacă R şi R' sunt inele asociative, să se arate că a nilpotent în R implică $f(a)$ nilpotent în R'.
c) Dacă f este surjectiv, să se arate că a central în R implică $f(a)$ central în R'.
d) Dacă $R,\ R'$ sunt inele asociative cu unitate şi f este unital, să se arate că a inversabil în R implică $f(a)$ inversabil în R'.
e) Sunt reciprocele implicaţiilor de mai sus adevărate? Justificaţi răspunsul.

2) Fie $(R,+,\cdot)$ un inel şi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:
i) inelul $(M_n(R),+,\cdot)$ are cel puţin $n+1$ subinele izomorfe cu $(R,+,\cdot)$;
ii) inelul $(M_n(R),+,\cdot)$, cu $n \geq 2$, este comutativ dacă şi numai dacă $R \cdot R = \{0\}$;
iii) dacă $n \geq 2$ şi $R \neq \{0\}$ atunci inelul $(M_n(R),+,\cdot)$ are divizori ai lui zero şi elemente nilpotente nenule;
iv) inelul $(M_n(R),+,\cdot)$ este cu unitate dacă şi numai dacă inelul $(R,+,\cdot)$ este cu unitate;
v) dacă $n \geq 2$ şi $(R,+,\cdot)$ este un inel nenul cu unitate, atunci inelul $(M_n(R),+,\cdot)$ are elemente idempotente diferite de elementul nul şi elementul unitate;
vi) inelul $(M_n(R),+,\cdot)$ este corp (domeniu de integritate) dacă şi numai dacă $n = 1$ şi $(R,+,\cdot)$ este corp (domeniu de integritate).

3) Fie $(R,+,\cdot)$ un inel asociativ cu unitate şi $(U(R,+,\cdot),\cdot)$ grupul (multiplicativ) al elementelor inversabile ale inelului R. Să se arate că:
i) $0 \in U(R,+,\cdot)$ dacă şi numai dacă $|R| = 1$;
ii) $(R,+,\cdot)$ este corp dacă şi numai dacă $R \neq 0$ şi $U(R,+,\cdot) = R^* = R \setminus \{0\}$;
iii) dacă inelele $(R,+,\cdot)$ şi $(R',+,\cdot)$ sunt izomorfe atunci grupurile $(U(R,+,\cdot),\cdot)$ şi $(U(R',+,\cdot),\cdot)$ sunt izomorfe;
iv) există inele $(R,+,\cdot)$ şi $(R',+,\cdot)$ neizomorfe pentru care grupurile $(U(R,+,\cdot),\cdot)$ şi $(U(R',+,\cdot),\cdot)$ sunt izomorfe.

4) a) Fie $(R,+,\cdot)$ un inel asociativ cu unitate şi $(End(R,+),+,\circ)$ inelul endomorfismelor grupului său aditiv. Să se arate că:
i) dacă pentru orice $f \in End(R,+)$ şi orice $x \in R$, $f(x) = f(1) \cdot x$ atunci inelele $(R,+,\cdot)$ şi $(End(R,+),+,\circ)$ sunt izomorfe;
ii) dacă inelul $(R,+,\cdot)$ este comutativ atunci inelul $(End(R,+),+,\circ)$ este comutativ dacă şi numai dacă $(R,+,\cdot) \simeq (End(R,+),+,\circ)$.
b) Să se determine endomorfismele şi automorfismele grupurilor $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ şi $(\mathbb{Z}_n,+)$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$. Care dintre acestea sunt endomorfisme, respectiv automorfisme pentru inelele $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$?

5) a) Să se descrie toate structurile de inel, respectiv inel cu unitate, ce se pot defini pe grupul abelian $(\mathbb{Z},+)$.
b) Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Să se arate că toate structurile de inel cu unitate pe grupul abelian $(\mathbb{Z}_n,+)$ sunt izomorfe cu inelul $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$.

6) Fie p un număr prim. Să se arate că, abstracţie făcând de un izomorfism, există doar două inele asociative cu p elemente.

7) a) Să se arate că singurul omomorfism nenul de corpuri de la $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ la $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este omomorfismul de incluziune.
b) Să se arate că dacă $(R, +, \cdot)$ este un inel şi restricţiile la $\mathbb{Z}$ a două omomorfisme $g, h : \mathbb{Q} \to R$ sunt egale atunci $g = h$.

8) Să se determine automorfismele corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

9) Să se arate că singurul endomorfism nenul al corpului $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este $1_{\mathbb{R}}$.

10) Fie $m, n \in \mathbb{N},\ m \geq 2,\ n \geq 2.$ Să se determine omomorfismele de inele de la $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ la $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.