LISTA 10

1) a) Să se dea exemplu de subinel al unui inel cu unitate care nu conţine unitatea şi de subinel al unui corp care nu este subcorp.
b) Să se dea exemplu de subinel S al unui inel cu unitate $(R, +, \cdot)$ care este, în raport cu operaţiile induse, un inel cu unitate, dar unitatea sa este diferită de unitatea lui R.

2) Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, adică

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{2} \text{ şi } \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q} \cdot \sqrt{2}.$$

Să se arate că:
i) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este un subinel al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ care conţine pe 1 şi acest subinel este generat de $\{1, \sqrt{2}\}$;
ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este un subcorp al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi acest subcorp este generat de $\sqrt{2}$;
iii) $S_1 = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ nu este subinel al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;
iv) $S_2 = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ nu este subcorp al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

3) Un număr $d \in \mathbb{Z}$ se numeşte *întreg liber de pătrate* dacă $d \neq 1$ şi d nu se divide prin pătratul nici unui număr prim. Fie d un întreg liber de pătrate. Să se arate că:
i) $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$;
ii) $a, b \in \mathbb{Q}$ şi $a + b\sqrt{d} = 0$ implică $a = b = 0$;
iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este un subinel în $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ care conţine pe 1 şi acest subinel este generat de $\{1, \sqrt{d}\}$;
iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este un subcorp al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi acest subcorp este generat de $\sqrt{d}$.

4) a) Fie $d \in \mathbb{Z}$ un întreg liber de pătrate şi funcţia

$$\delta : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{N},\ \delta(z) = |z \cdot \overline{z}|,$$

unde cu $\overline{z} = a - b\sqrt{d}$ s-a notat conjugatul lui $z = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Să se arate că z este inversabil în $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ dacă şi numai dacă $\delta(z) = 1$.
b) Să se determine elementele inversabile ale inelului întregilor lui Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Să se arate că inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ are o infinitate de elemente inversabile.

5) Determinaţi subinelele lui $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ce conţin pe 1.

6) Să se determine subinelul şi subcorpul lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ generat de $\{1, \sqrt[3]{2}\}$.

7) Să se determine:
i) cea mai mică submulţime a lui $\mathbb{R}$ stabilă în raport cu $+$ şi $\cdot$ ce conţine pe 1;
ii) cel mai mic subinel al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ care conţine pe 1;
iii) cel mai mic subcorp al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

8) Fie $d \in \mathbb{Z}$ un întreg liber de pătrate şi

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se arate că R este subinel în $(M_2(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ şi că inelele $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}],+,\cdot)$ şi $(R,+,\cdot)$ sunt izomorfe.

9) Fie $d \in \mathbb{Z}$ un întreg liber de pătrate şi

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se arate că:
i) K este parte stabilă în $M_2(\mathbb{Q})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea şi formează corp în raport cu operaţiile induse;
ii) corpurile $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}),+,\cdot)$ şi $(K,+,\cdot)$ sunt izomorfe.

10) Fie $(R,+,\cdot)$ un inel asociativ cu unitate şi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine centrul inelului $(M_n(R),+,\cdot)$.