LISTA 1

1) Fie M o mulţime, $\mathcal{P}(M)$ mulţimea submulţimilor sale şi $\triangle$ **diferenţa simetrică**, adică pentru $X, Y \subseteq M$ avem $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Să se arate că $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ este un grup.

2) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. Este $(\mathbb{R}, *)$ grup? Dar $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$?

3) Fie $G = (-1, 1)$, $x, y \in G$ şi

$$(*) \qquad x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Să se arate că:
i) egalitatea $(*)$ defineşte o operaţie $*$ pe G şi $(G, *)$ este un grup abelian;
ii) între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ şi $(G, *)$ există un izomorfism $f : \mathbb{R}_+^* \to G$ de forma $f(x) = \dfrac{\alpha x - 1}{x + 1}$.

4) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$. Arătaţi că:
a) $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \Leftrightarrow x \cdot y = y \cdot x \Leftrightarrow (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$;
b) $x \cdot y = y \cdot x \Rightarrow (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$;
c) $x \cdot y = y \cdot x \Rightarrow x^m \cdot y^n = y^n \cdot x^m,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

5) Pe $Q = \{a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$ se defineşte înmulţirea astfel: dacă $q = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ şi $q' = b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k$ atunci

$$\begin{aligned} qq' = {} & (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i \\ & + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)j + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)k. \end{aligned}$$

Să se arate că:
i) $(Q, \cdot)$ este un monoid necomutativ;
ii) grupul elementelor inversabile din $(Q, \cdot)$ coincide cu $Q^* = Q \setminus \{0\}$;
iii) $H = \{-1, 1, -i, i, -j, j, -k, k\}$ este un subgrup al lui $(Q^*, \cdot)$ (numit *grupul cuaternionilor*);
iv) $(Q^*, \cdot)$ are un subgrup izomorf cu $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

6) Să se arate că un semigrup $(G, \cdot)$ este grup dacă şi numai dacă $G \neq \emptyset$ şi

$$a \cdot G = G = G \cdot a,\ \forall a \in G.$$

7) Să se arate că grupul $(\mathbb{C}, +)$ este izomorf cu $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, dar $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ nu este izomorf cu $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \cdot)$.

8) Să se arate că dacă $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ este un endomorfism al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ atunci

$$f(x) = f(1) \cdot x,\ \forall x \in \mathbb{Q},$$

adică f este o translaţie a lui $(\mathbb{Q}, \cdot)$ şi că orice translaţie a lui $(\mathbb{Q}, \cdot)$ este un endomorfism al lui $(\mathbb{Q}, +)$. Să se determine apoi automorfismele lui $(\mathbb{Q}, +)$.

9) Să se arate că există un singur omomorfism de grupuri de la: a) $(\mathbb{Q}, +)$ la $(\mathbb{Z}, +)$, b) $(\mathbb{Z}_n, +)$ la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$).

10) Să se arate că grupurile : i) $(\mathbb{Q},\ +)$ şi $(\mathbb{Q}^*,\ \cdot)$; ii) $(\mathbb{R},\ +)$ şi $(\mathbb{R}^*,\ \cdot)$; iii) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.