LISTA 9

1) a) Fie $\varphi \in \mathbb{R}$. Să se arate că rotaţia în plan de unghi φ, adică funcţia

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x,y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi),$$

este automorfism al lui $\mathbb{R}^2$. Să se scrie matricea lui h în baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$ (adică în baza (e_1, e_2), cu $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$).
b) Să se arate că funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,-y)$ (simetria în raport cu axa Ox) şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (-x,y)$ (simetria în raport cu axa Oy) sunt automorfisme ale lui $\mathbb{R}^2$. Să se scrie matricele lui f, g, $f-g$, $f+2g$ şi $g\circ f$ în baza canonică.

2) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, 2x-y, 3x+2y)$. Să se arate că f este o transformare liniară, să se arate că $v = ((1,2),(-2,1))$, respectiv $v' = ((1,-1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$ este bază în $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$ şi să se scrie matricea lui f în perechea de baze (v,v').

3) Să se arate că fiecare dintre mulţimile de vectori $\{v_1,v_2,v_3\}$ şi $\{v_1',v_2',v_3'\}$ cu

$$v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,3,3), v_3 = (3,7,1) \text{ şi } v_1' = (3,1,4), v_2' = (5,2,1), v_3' = (1,1,-6)$$

formează câte o bază a lui $\mathbb{R}^3$ şi să se găsească legătura dintre coordonatele unui vector scris în cele două baze.

4) Fie $v = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^4$, vectorii

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_1+v_2,\ u_3 = v_1+v_2+v_3,\ u_4 = v_1+v_2+v_3+v_4$$

şi $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ cu

$$[f]_v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că $u = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ este o bază a lui $\mathbb{R}^4$ şi să se scrie matricea $[f]_u$.

5) Fie V un spaţiu vectorial real, $v = (v_1,v_2,v_3)$ o bază a spaţiului V, vectorii

$$u_1 = v_1+2v_2+v_3,\ u_2 = v_1+v_2+2v_3,\ u_3 = v_1+v_2$$

şi $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$. Să se arate că $u = (u_1,u_2,u_3)$ este o bază a lui V şi să se scrie matricea lui $[f]_v$ ştiind că

$$[f]_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

6) Fie $P_2(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} f \leq 2\}$. Să se arate că

$$\varphi : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}),\ \varphi(a_0+a_1X+a_2X^2) = a_0+a_1+(a_1+a_2)X+(a_0+a_2)X^2$$

este o transformare liniară şi să se determine $[f]_b$ şi $[f]_{b'}$ unde

$$b = (1,X,X^2) \text{ şi } b' = (1,X-1,X^2+1).$$

7) Fie V, V' două $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ câte o bază în V, respectiv V' şi $f : V \to V'$ o transformare liniară a cărei matrice în perechea de baze (a, b) este

$$[f]_{a,b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se determine:
i) $f(v)$ pentru orice $v \in V$;
ii) dimensiunea spaţiilor vectoriale $\operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f$;
iii) matricea $[f]_{a',b'}$, unde $a' = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3)$ şi $b' = (b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3)$.

8) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ aplicaţia liniară definită pe baza canonică astfel:

$$f(e_1) = (1, 2, 3, 4),\ f(e_2) = (4, 3, 2, 1),\ f(e_3) = (-2, 1, 4, 1).$$

Să se determine:
i) $f(v)$ pentru orice $v \in \mathbb{R}^3$;
ii) matricea lui f în bazele canonice;
iii) câte o bază în $\operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f$.

9) Fie $S = \{(t, 2t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ şi $T = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$.
i) Să se arate că S şi T sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^3$ şi să se reprezinte geometric elementele lor.
ii) Să se determine câte o bază în S şi T.
iii) Să se determine $S \cap T$ şi $S + T$.

10) Fie V, V' $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale, $v = (v_1, v_2, v_3)$ o bază în V, $v' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ o bază în V' şi $f : V \to V'$ transformarea liniară cu

$$[f]_{v,v'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Să se determine:
i) dimensiunea şi câte o bază pentru $\operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f$;
ii) $[f]_{v,e'}$ în cazul în care $V' = \mathbb{R}^3$, $v'_1 = (1, 0, 0)$, $v'_2 = (0, 1, 1)$, $v'_3 = (0, 0, 1)$ şi e' este baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$;
iii) $f(x)$ pentru $x = 2v_1 - v_2 + 3v_3$, în condiţiile de la ii).