LISTA 7

1) Să se arate că vectorii $(1, 2, -1)$, $(3, 2, 4)$, $(-1, 2, -6)$ din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar dependenţi şi să se găsească o relaţie de dependenţă între ei.

2) a) Să se dea o condiţie necesară şi suficientă pentru ca vectorii $v_1 = (a_1, b_1)$, $v_2 = (a_2, b_2)$ să formeze o bază a lui $\mathbb{R}^2$. Să se interpreteze geometric această condiţie. Folosind condiţia stabilită, găsiţi o infinitate de baze ale lui $\mathbb{R}^2$. Există o bază a lui $\mathbb{R}^2$ în care coordonatele unui vector $v = (x, y)$ să coincidă cu x şi y? Să se arate că $v_1 = (1, 0)$ şi $v_2 = (1, 1)$ formează o bază a lui $\mathbb{R}^2$ şi să se găsească coordonatele lui $v = (x, y)$ în această bază.
b) Formulaţi şi rezolvaţi o problemă similară celei de mai sus pentru $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

3) Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial şi $v_1, v_2, v_3 \in V$. Să se arate că $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_2 + v_3, v_3 + v_1, v_1 + v_2\rangle$ şi că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă vectorii $v_2 + v_3, v_3 + v_1, v_1 + v_2$ sunt liniar independenţi. Este această proprietate adevărată într-un spaţiu vectorial peste un corp oarecare K?

4) Să se arate că în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $M_2(\mathbb{R})$ matricele

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formează o bază şi să se determine coordonatele matricei $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ în această bază.

5) a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinoamele $f_1 = (X - b)(X - c)$, $f_2 = (X - c)(X - a)$, $f_3 = (X - a)(X - b)$. Să se arate că:
i) f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}$-spaţiul $\mathbb{R}[X]$ dacă şi numai dacă $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$;
ii) dacă $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$ atunci pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$ cu $\operatorname{grad} f \leq 2$ există $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, unic determinate, astfel încât $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$.
b) Să se determine $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ când $f = 1 + 2X - X^2$, $a = 1$, $b = 2$ şi $c = 3$.

6) Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x$. Să se arate că $L = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este o submulţime liberă a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

7) Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$ ($n \in \mathbb{N}^*$) cu $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ şi funcţiile $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = \sin(\lambda_i x)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Să se arate că $f_1, \ldots, f_n$ sunt vectori liniar independenţi ai $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

8) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $v_1 = (a, 1, 1)$, $v_2 = (1, a, 1)$, $v_3 = (1, 1, a)$ să formeze o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

9) Care dintre următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$:
a) $\{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\}$;
b) $\{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, 1)\}$;
c) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 3), (2, 1, 1)\}$;
d) $\{(-1, 3, 1), (2, -4, -3), (-3, 8, 2)\}$;
e) $\{(1, -3, -2), (-3, 1, 3), (-2, -10, -2)\}$
sunt baze ale $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$?

10) Fie V un spaţiu vectorial, V_1, V_2 subspaţii ale lui V şi $X_1 \subseteq V_1$, $X_2 \subseteq V_2$. Să se arate că:

i) dacă $V = V_1 \oplus V_2$ şi X_i este bază a lui V_i $(i = 1, 2)$ atunci $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ şi $X_1 \cup X_2$ este o bază a lui V;
ii) dacă $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, X_i generează pe V_i $(i = 1, 2)$ şi $X_1 \cup X_2$ este o bază a lui V atunci X_i este bază a lui V_i $(i = 1, 2)$ şi $V = V_1 \oplus V_2$.