LISTA 6

1) Fie funcţiile:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = (-x, y)$ (simetria în raport cu axa Oy);

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y) = (x, -y)$ (simetria în raport cu axa Ox);

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_3(x, y) = (x \cos\varphi - y \sin\varphi, x \sin\varphi + y \cos\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, (rotaţia în plan de unghi φ);

d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_4(x, y) = (x + y, 2x - y, 3x + 2y)$.

Să se arate că $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ sunt transformări liniare de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale. Care dintre acestea sunt izomorfisme? Care dintre acestea sunt endomorfisme? Care dintre acestea sunt automorfisme?

2) Fie V, V_1, V_2 K-spaţii vectoriale, două funcţii $f : V \to V_1$, $g : V \to V_2$ şi $h : V \to V_1 \times V_2$, $h(x) = (f(x), g(x))$. Să se arate că h este o transformare liniară dacă şi numai dacă f şi g sunt transformări liniare. Generalizare.

3) a) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ şi $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Să se arate că f este o transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale dacă şi numai dacă există $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, unic determinate, astfel încât

$$f(x_1, \dots, x_m) = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m,\ \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

b) Să se determine tranformările liniare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

4) a) Există o transformare liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(1, 0, 3) = (1, 1)$ şi $f(-2, 0, -6) = (2, 1)$?
b) Să se arate că există o transformare liniară $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(1, 1) = (2, 5)$ şi $f(1, 0) = (1, 4)$. Să se determine $f(2, 3)$. Este f izomorfism?

5) a) Să se arate că dacă V, V' sunt $\mathbb{Q}$-spaţii vectoriale atunci o **funcţie** $f : V \to V'$ este liniară dacă şi numai dacă este **aditivă**, adică $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in V$.
b) Să se arate că există o funcţie aditivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care nu este $\mathbb{R}$-liniară.

6) Fie V_1, V_2 K-spaţii vectoriale şi $f : V_1 \to V_2$ o transformare liniară. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) f este surjectivă;
b) există o transformare liniară $s : V_2 \to V_1$ astfel încât $f \circ s = 1_{V_2}$;
c) dacă V este K-spaţiu vectorial şi $\alpha, \beta : V \to V_1$ sunt transformări liniare atunci

$$\alpha \circ f = \beta \circ f \ \Rightarrow\ \alpha = \beta.$$

7) a) Fie V_1, V_2, V_3 K-spaţii vectoriale, $f : V_2 \to V_3$, $g : V_1 \to V_3$ transformări liniare şi f surjectivă. Să se arate că există o transformare liniară $h : V_1 \to V_2$ astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} V_3 & V_1 \arrow[l, "g"'] \arrow[dl, dotted, "h"] \\ V_2 \arrow[u, "f"] & \end{tikzcd}$$

să fie comutativă, adică $g = f \circ h$.
b) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2x - y, z)$. Să se arate că f este o transformare liniară surjectivă şi să se găsească o transformare liniară $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ astfel încât $f \circ h = 1_{\mathbb{R}^2}$.

8) Fie V_1, V_2 K-spaţii vectoriale şi $f : V_1 \to V_2$ o transformare liniară. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este injectivă;
b) există o transformare liniară $r : V_2 \to V_1$ astfel încât $r \circ f = 1_{V_1}$;
c) dacă V este K-spaţiu vectorial şi $\alpha, \beta : V \to V_1$ sunt transformări liniare atunci

$$f \circ \alpha = f \circ \beta \Rightarrow \alpha = \beta.$$

9) a) Fie V_1, V_2, V_3 K-spaţii vectoriale, $f : V_1 \to V_2$, $g : V_1 \to V_3$ transformări liniare şi f injectivă. Să se arate că există o transformare liniară $h : V_2 \to V_3$ astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & V_2 \arrow[dl, dotted, "h"] \\ V_3 & \end{tikzcd}$$

să fie comutativă, adică $g = h \circ f$.
b) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y, x + y, 2x)$. Să se arate că f este o transformare liniară injectivă şi să se găsească o transformare liniară $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $h \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$.