LISTA 5

1) Arătaţi că grupul abelian $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă $*$ definită prin

$$\alpha * x = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}_+^*.$$

2) Fie V un K-spaţiu vectorial şi M o mulţime. Să se arate că V^M este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite punctual în V^M, adică

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall f, g \in V^M,\ \forall \alpha \in K.$$

3) Poate fi organizată o mulţime finită ca un spaţiu vectorial peste un corp infinit?

4) Fie $p \in \mathbb{N}$ prim. Poate fi organizat grupul abelian $(\mathbb{Z}, +)$ ca spaţiu vectorial peste corpul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$?

5) Fie $(V, +)$ un grup abelian, $V \neq \{0\}$, K un corp şi $\alpha \in K$. Să se arate că:
i) dacă $(V, +)$ este un K-spaţiu vectorial şi

$$t_\alpha : V \to V,\ t_\alpha(x) = \alpha x$$

atunci t_α este endomorfism al grupului $(V, +)$ şi aplicaţia

$$\varphi : K \to End(V, +),\ \varphi(\alpha) = t_\alpha$$

este omomorfism injectiv de inele;
ii) dacă $\varphi : K \to End(V, +)$ este omomorfism injectiv de inele atunci grupul $(V, +)$ este K-spaţiu vectorial în raport cu operaţia externă definită prin

$$\alpha x = (\varphi(\alpha))(x);$$

iii) există o bijecţie între operaţiile externe pe V cu domeniul de operatori K cu proprietatea că înzestrează grupul $(V, +)$ cu o structură de K-spaţiu vectorial şi omomorfismele injective de inele între K şi $End(V, +)$.

6) Fie $(V, +)$ un grup abelian şi K un corp. Să se arate că:
i) există o structură de K-spaţiu vectorial pe $(V, +)$ dacă şi numai dacă inelul $(End(V, +)+, \circ)$ are un subinel care este corp izomorf cu K;
ii) oricare ar fi K un corp nu există nici o structură de K-spaţiu vectorial pe grupul $(\mathbb{Z}, +)$;
iii) există pe grupul $(\mathbb{Q}, +)$ o structură de K-spaţiu vectorial dacă şi numai dacă corpurile K şi $\mathbb{Q}$ sunt izomorfe.

7) Fie V un K-spaţiu vectorial, $\alpha, \beta, \gamma \in K$, $x, y, z \in V$ astfel încât $\alpha\gamma \neq 0$ şi $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Să se arate că $\langle x, y\rangle = \langle y, z\rangle$.

8) Formează polinoamele $f_1 = 3X + 2$, $f_2 = 4X^2 - X + 1$, $f_3 = X^3 - X^2 + 3$ un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $P_3(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad}\, f \leq 3\}$? Justificaţi răspunsul.

9) Fie V_1, V_2 substaţii ale unui spaţiu vectorial V. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) $V_1 \cup V_2$ este subspaţiu al lui V;
b) $V_1 + V_2 = V_1 \cup V_2$;
c) $V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$.

10) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ considerăm

$$(\mathbb{R}^\mathbb{R})_i = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ este impară}\},\ (\mathbb{R}^\mathbb{R})_p = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ este pară}\}.$$

Să se arate că $(\mathbb{R}^\mathbb{R})_i$ şi $(\mathbb{R}^\mathbb{R})_p$ sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ şi că $\mathbb{R}^\mathbb{R} = (\mathbb{R}^\mathbb{R})_i \oplus (\mathbb{R}^\mathbb{R})_p$.