LISTA 2

1) Fie M o mulţime şi $\mathcal{P}(M)$ mulţimea submulţimilor lui M. Definim pe $\mathcal{P}(M)$ două operaţii $+$ şi $\cdot$ astfel:

$$X + Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \text{ şi } X \cdot Y = X \cap Y.$$

Să se arate că:
i) $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este inel asociativ, comutativ, cu unitate;
ii) dacă $|M| \geq 2$ atunci orice $X \in \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset, M\}$ este divizor al lui zero;
iii) $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ este corp dacă şi numai dacă $|M| = 1$.

2) Fie $(R, +, \cdot)$ un inel asociativ şi $a, b \in R$. Să se arate că:
a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow ab = ba \Leftrightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
b) dacă $ab = ba$ atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned} (a+b)^n =& C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n; \\ a^n - b^n =& (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + a b^{n-2} + b^{n-1}\right); \\ a^{2n+1} + b^{2n+1} =& (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1} b + \cdots - a b^{2n-1} + b^{2n}\right). \end{aligned}$$

3) Fie $a \in \mathbb{Z}$. Să se arate că $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_n$ este inversabil în $\mathbb{Z}_n$ dacă şi numai dacă $(a, n) = 1$. Să se deducă de aici că inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp dacă şi numai dacă n este număr prim.

4) a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{12}$ ecuaţiile $\widehat{4}x + \widehat{5} = \widehat{9}$ şi $\widehat{5}x + \widehat{5} = \widehat{9}$ şi în $M_2(\mathbb{C})$ ecuaţia

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{12}$ sistemul:

$$\begin{cases} \widehat{3}x + \widehat{4}y = \widehat{11} \\ \widehat{4}x + \widehat{9}y = \widehat{10} \end{cases}.$$

5) Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că:
i) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ este un subinel al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ care conţine pe 1;
ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este un subcorp al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;
iii) $S_1 = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ nu este subinel al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;
iv) $S_2 = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ nu este subcorp al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

6) Un număr $d \in \mathbb{Z}$ se numeşte **întreg liber de pătrate** dacă $d \neq 1$ şi d nu se divide prin pătratul nici unui număr prim. Fie d un întreg liber de pătrate. Să se arate că:
i) $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$;
ii) $a, b \in \mathbb{Q}$ şi $a + b\sqrt{d} = 0$ implică $a = b = 0$;
iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este un subinel în $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ care conţine pe 1;
iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este un subcorp al lui $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

7) Să se arate că singurul omomorfism nenul de corpuri de la $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ la $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este omomorfismul de incluziune $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{C},\ i(x) = x$.

8) Să se determine automorfismele corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

9) Să se arate că singurul endomorfism nenul al corpului $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este $1_{\mathbb{R}}$.