LISTA 13

1) Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2$ este o formă biliniară şi să se determine matricea lui f în baza canonică şi în baza $((1, 1), (1, -1))$.

2) Ştiind că $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este forma biliniară care are în baza canonică matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ să se determine $f((x_1, x_2), (y_1, y_2))$.

3) Să se arate că $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_3$ este biliniară şi să se determine matricea lui f în baza $((1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0))$.

4) Fie K un corp comutativ şi V un spaţiu vectorial peste K. O *formă biliniară* $f : V \times V \to K$ se numeşte *simetrică*, respectiv *antisimetrică* dacă $f(x, y) = f(y, x)$, respectiv $f(x, y) = -f(y, x)$ pentru orice $x, y \in V$. Dacă $\dim V = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ să se arate că sunt echivalente următoarele condiţii:
i) forma biliniară $f : V \times V \to K$ este simetrică (antisimetrică);
ii) pentru orice bază $v = (v_1, \dots, v_n)$ a lui V matricea lui f în baza v este simetrică (antisimetrică);
iii) există o bază $v = (v_1, \dots, v_n)$ a lui V în care matricea lui f este simetrică (antisimetrică).

5) Fie K unul dintre corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ şi V un K-spaţiu vectorial cu $\dim V = n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:
i) pentru orice formă biliniară $f : V \times V \to K$ există o formă biliniară simetrică $f_s : V \times V \to K$ şi o formă biliniară antisimetrică $f_a : V \times V \to K$ astfel încât $f = f_s + f_a$;
ii) pentru orice matrice $A \in M_n(K)$ există o matrice simetrică $A_s \in M_n(K)$ şi o matrice antisimetrică $A_a \in M_n(K)$ astfel încât $A = A_s + A_a$.

6) Fie V un K-spaţiu vectorial. O funcţie $q : V \to K$ se numeşte *formă pătratică* dacă există o formă biliniară simetrică $f : V \times V \to K$ astfel încât

$$q(x) = f(x, x),\ \forall x \in V.$$

Să se arate că dacă $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ atunci:
i) pentru orice formă pătratică $q : V \to K$ există o singură formă biliniară simetrică $f : V \times V \to K$ astfel încât $q(x) = f(x, x)$ pentru orice $x \in V$; această formă este numită *forma polară a lui* q şi este definită prin

$$f(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]; \tag{1}$$

ii) dacă $f : V \times V \to K$ este o formă biliniară simetrică şi nenulă atunci forma pătratică q asociată lui f este nenulă.

7) *Matricea unei forme pătratice* este, prin definiţie, matricea formei sale polare. Să se afle matricele următoarelor forme pătratice în bazele canonice:
a) $q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_1(x, y) = 2x^2 + 3xy + 6y^2$;
b) $q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_2(x, y) = 8xy + 4y^2$;
c) $q_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_3(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + 3y^2 + yz + 7z^2$;
d) $q_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q_4(x, y) = 4xy$;
e) $q_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q_5(x, y, z) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 2yz$.

8) Fie K un corp comutativ, V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită n şi $f : V \times V \to K$ o *formă biliniară*. Se spune că f este *diagonalizabilă* dacă există o bază a lui V în care matricea lui f are forma diagonală.

i) Să se arate că dacă f este diagonalizabilă atunci f este simetrică;

ii) Dacă corpul K este $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ atunci adevărată şi reciproca lui i), adică f este simetrică implică f este diagonalizabilă.

iii) Să se arate că forma biliniară simetrică $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2,\ f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ (unde $x = (x_1, x_2)$ şi $y = (y_1, y_2)$) nu este diagonalizabilă.

9) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Să se diagonalizeze următoarele forme biliniare

i) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = {}^t xAy$, unde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ şi $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

ii) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = {}^t xBy$, unde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ şi $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Să se diagonalizeze formele pătratice asociate transformărilor biliniare de mai sus.

10) Să se diagonalizeze formele pătratice din problema 7), prin completare la pătrate.