LISTA 12

1) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $f \in Aut_K(V)$. Să se arate că valorile proprii ale lui f sunt nenule, apoi să se determine relaţia dintre valorile proprii ale lui f şi valorile proprii ale lui f^{-1} şi dintre vectorii proprii ai lui f şi vectorii proprii ai lui f^{-1}. Există endomorfisme care au toate valorile proprii nenule, dar nu sunt automorfisme?

2) a) Fie K un corp comutativ, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_m(K)$ şi

$$p = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in K[X].$$

Să se arate că dacă $\lambda \in K$ este valoare proprie a lui A atunci $p(\lambda)$ este valoare proprie pentru $p(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_nA^n$. În particular, dacă λ este valoare proprie a lui A atunci λ^n este valoare proprie pentru A^n.

b) Fie V un K-spaţiu vectorial, $f \in End_K(V)$ şi $p = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in K[X]$. Să se arate că $p(f) = a_01_V + a_1f + \cdots + a_nf^n \in End_K(V)$, iar dacă $\lambda \in K$ şi $x \in V$ sunt valoare, respectiv vector propriu pentru f atunci $p(\lambda)$ şi x sunt valoare, respectiv vector propriu pentru $p(f)$.

3) Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ o bază a lui V şi f un endomorfism al lui V cu

$$[f]_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai lui f.

b) Să se arate că există o bază a lui V formată din vectori proprii ai lui f şi să se determine o astfel de bază.

c) Să se scrie matricea lui f în baza determinată la b).

4) Fie $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ o bază a lui $\mathbb{R}^4$ şi $f \in End_{\mathbb{R}}(R^4)$ cu

$$[f]_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai lui f şi să se arate că

$$S = \langle v_1 + 2v_2, v_2 + v_3 + 2v_4 \rangle$$

este un subspaţiu f-invariant al lui $\mathbb{R}^4$.

5) Fie K un corp comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(K)$. Să se arate că matricea A este similară cu o matrice triunghiulară din $M_n(K)$ (adică este *triangulabilă* în $M_n(K)$) dacă şi numai dacă polinomul caracteristic al lui A are toate rădăcinile (n rădăcini) în K.

6) a) Să se arate că aplicaţia liniară

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (3x + 2y, -2x + 3y)$$

nu este diagonalizabilă.

b) Să se arate că rotaţia de unghi φ, adică

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$$

nu este diagonalizabilă.

7) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se arate că:
i) A nu este diagonalizabilă în $M_n(\mathbb{Q})$, dar este diagonalizabilă în $M_2(\mathbb{R})$;
ii) B nu este diagonalizabilă în $M_n(\mathbb{R})$, dar este diagonalizabilă în $M_2(\mathbb{C})$.

8) Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ şi $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformările liniare definite prin

$$f(x,y) = (-3x + 4y, 2x - y),\ g(x,y) = (x + y, x - y),$$
$$h(x,y,z) = (-x + 2y + 2z, 2x + 2y + 2z, -3x - 6y - 6z).$$

a) Să se determine:
i) polinoamele caracteristice ale lui f, g şi h;
ii) valorile proprii ale lui f, g şi h;
iii) subspaţiile proprii ale lui f, g şi h corspunzătoare fiecărei valori proprii.
b) Sunt f, g, h diagonalizabile? În caz afirmativ, să se determine câte o bază a lui $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$ în care matricele lui f, g, respetiv h sunt diagonale şi să se stabilească legătura dintre aceste matrice şi matricele $[f]_e$, $[g]_e$, $[h]_{e'}$, unde e este baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$ şi e' este baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, iar după aceea să se afle $([f]_e)^n$, $([g]_e)^n$ şi $([h]_{e'})^n$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

9) Pentru aplicaţiile liniare $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definite prin

$$f(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + 4x_2 + x_3, -2x_1 - 4x_2 - x_3),$$
$$g(x_1,x_2,x_3) = (4x_1 + 9x_2, -2x_2 + 8x_3, 7x_3)$$

se menţin cerinţele din problema anterioară.

10) Să se studieze dacă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

este diagonalizabilă. În caz afirmativ să se determine matricea diagonalizatoare, adică $S \in GL_4(\mathbb{R})$ pentru care $S^{-1}AS$ are forma diagonală, şi să se calculeze A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.