LISTA 10

1) Să se determine, folosind transformări elementare, rangurile următoarelor matrici:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ \alpha & 3 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; e) $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$.

2) Folosind transformări elementare, să se stabilească dacă matricile de mai jos sunt inversabile şi, acolo unde e posibil, să se determine inversele:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \\ 9 & 12 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; f) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$.

3) În $\mathbb{Q}$-spaţiul vectorial $\mathbb{Q}^3$ considerăm vectorii

$$a = (-2, 1, 3),\ b = (3, -2, -1),\ c = (1, -1, 2),\ d = (-5, 3, 4),\ e = (-9, 5, 10).$$

Să se arate că $\langle a, b\rangle = \langle c, d, e\rangle$.

4) În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră subspaţiile generate astfel:

a) $S = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, cu $u_1 = (1, 2, 1, -2)$, $u_2 = (2, 3, 1, 0)$, $u_3 = (1, 2, 2, -3)$,
$T = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, cu $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 3, 0, -3)$;

b) $S = \langle u_1, u_2\rangle$, cu $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 1, 1)$,
$T = \langle v_1, v_2\rangle$, cu $v_1 = (2, -1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 3, 7)$;

c) $S = \langle u_1, u_2\rangle$, cu $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$,
$T = \langle v_1, v_2\rangle$, cu $v_1 = (0, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$;

d) $S = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, cu $u_1 = (1, 2, -1, -2)$, $u_2 = (3, 1, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1, -1)$,
$T = \langle v_1, v_2\rangle$, cu $v_1 = (-1, 2, -7, -3)$, $v_2 = (2, 5, -6, -5)$.

Să se determine câte o bază şi dimensiunea subspaţiilor S, T, $S + T$ şi $S \cap T$.

5) Fie $f \in End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4)$ pentru care matricea în baza canonică este

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine câte o bază în $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.