LISTA 1

1) Fie M o mulţime, $\mathcal{P}(M)$ mulţimea submulţimilor sale şi $\triangle$ **diferenţa simetrică**, adică pentru $X, Y \subseteq M$ avem $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Să se arate că $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ este un grup.

2) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. Este $(\mathbb{R}, *)$ grup? Dar $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$?

3) Fie $G = (-1, 1)$, $x, y \in G$ şi

$$(*) \qquad x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Să se arate că:
i) egalitatea $(*)$ defineşte o operaţie $*$ pe G şi $(G, *)$ este un grup abelian;
ii) între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ şi $(G, *)$ există un izomorfism $f : \mathbb{R}_+^* \to G$ de forma $f(x) = \dfrac{\alpha x - 1}{x + 1}$.

4) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a, b \in G$ astfel încât $ab = ba$. Arătaţi că

$$a^m b^n = b^n a^m, \ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

5) Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi $\emptyset \neq H \subseteq G$. Să se arate că H este un subgrup în G dacă şi numai dacă H este parte stabilă în $(G, \cdot)$.

6) Să se arate că $H \subseteq \mathbb{Z}$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$ dacă şi numai dacă există un unic $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $H = n\mathbb{Z}$.

7) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $f, g : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = x^2$. Să se arate că:
i) f este o bijecţie;
ii) f este automorfism dacă şi numai dacă $(G, \cdot)$ este abelian;
iii) g este omomorfism dacă şi numai dacă $(G, \cdot)$ este abelian.

8) Să se arate că există un singur omomorfism de la grupul $(\mathbb{Q}, +)$ la grupul $(\mathbb{Z}, +)$.

9) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că există un singur omomorfism de la grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ la grupul $(\mathbb{Z}, +)$.

10) Să se determine automorfismele grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

11) Să se arate că dacă $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ este un endomorfism al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ atunci

$$f(x) = f(1) \cdot x, \ \forall x \in \mathbb{Q},$$

adică f este o translaţie a lui $(\mathbb{Q}, \cdot)$ şi că orice translaţie a lui $(\mathbb{Q}, \cdot)$ este un endomorfism al lui $(\mathbb{Q}, +)$. Să se determine apoi automorfismele lui $(\mathbb{Q}, +)$.