Seminar 7

Subgrupuri normale

1. Calculați ρ_H, ρ'_H și mulțimile factor corespunzătoare în fiecare dintre cazurile: a) $H=\{e, (1,2)\} \leq G = S_3$

b) $H = \{1, r^2, r^4\} \leq G = D_6$.

Soluție. a) $(1,3)H = \{(1,3)e, (1,3)\cdot(1,2)\} = \{(1,3), (1,2,3)\}$

$(2,3)H = \{(2,3)e, (2,3)(1,2)\} = \{(2,3), (1,3,2)\}$

Temă Verificați că $(1,2,3)H = (1,3)H$ și $(1,3,2)H = (2,3)H$ (ceea ce confirmă teoria)

Deci $G/\rho_H = S_3/\rho_H = \{H, (1,3)H, (2,3)H\} = \{\{e,(1,2)\}, \{(1,3),(1,2,3)\}, \{(2,3),(1,3,2)\}\}$

De aici găsim și $\rho_H = (H\times H) \cup ((1,3)H \times (1,3)H) \cup ((2,3)H \times (2,3)H)$

Temă: Scrieți explicit toate perechile care se află în relația ρ_H.

Analog $He = H(1,2) = H$, $H(1,3) = \{e(1,3), (1,2)(1,3)\} = \{(1,3), (1,3,2)\} = H(1,3,2)$

$H(2,3) = \{(2,3), (1,2,3)\} = H(1,2,3)$ și

$G/\rho'_H = S_3/\rho'_H = \{H, H(1,3), H(2,3)\} = \{\{e,(1,2)\}, \{(1,3),(1,3,2)\}, \{(2,3),(1,2,3)\}\}$

Obs Se observă că $S_3/\rho_H \neq S_3/\rho'_H$ deci H nu este subgrup normal.

b). $rH = \{r, r^3, r^5\} = r^3H = r^5H$

$sH = \{s, sr^2, sr^4\} = sr^2H = sr^4H$

$srH = \{sr, sr^3, sr^5\} = sr^3H = sr^5H$

Deci $D_6/\rho_H = \{H, rH, sH, srH\} = \{\{1,r^2,r^4\}, \{r,r^3,r^5\}, \{s, sr^2, sr^4\}, \{sr, sr^3, sr^5\}\}$

$\rho_H = (H\times H) \cup (rH \times rH) \cup (sH \times sH) \cup (srH \times srH)$

Analog $Hr = \{r, r^3, r^5\} = Hr^3 = Hr^5$

$Hs = \{s, r^2s, r^4s\} = \{s, sr^4, sr^2\} = Hsr^2 = Hsr^4$

$Hsr = \{sr, r^2sr, r^4sr\} = \{sr, sr^5, sr^3\} = Hsr^3 = Hsr^5$

Observăm că $xH = Hx$ pentru orice $x \in D_6$ deci $H \trianglelefteq D_6$

așadar $\rho_H = \rho'_H$ și $D_6/H = D_6/\rho_H = D_6/\rho'_H$ este un grup factor al lui D_6

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \{\sigma \in S_n / \sigma(n) = n\}$.

a) Demonstrați că $A \leq S_n$.

b) Caracterizați ρ_A și ρ'_A.

c) Demonstrați că dacă $n \geq 3$ atunci A nu este subgrup normal în S_n

Indicație: Pentru $\sigma = (1, n)$, $\tau = (1, 2, \ldots, n)$ avem $\sigma \rho_A \tau$ dar $\sigma \not\rho'_A \tau$.

d) Calculați S_n/ρ_A. Determinați $|S_n : A|$

Indicație. Clasele de echivalență sunt $A_i = \{\sigma \in S_n / \sigma(n) = i\}$ $1 \leq i \leq n$.

<u>Soluție</u>. a) • $e(n) = n \Rightarrow e \in A$

• $\sigma, \tau \in A \Rightarrow \sigma(n) = n = \tau(n) \Rightarrow (\sigma \cdot \tau)(n) = \sigma(\tau(n)) = \sigma(n) = n$
$\Rightarrow \sigma \cdot \tau \in A$

• $\sigma \in A \Rightarrow \sigma(n) = n \Rightarrow \sigma^{-1}(n) = n \Rightarrow \sigma^{-1} \in A$

Deci $A \leq S_n$

b) $\sigma \rho_A \tau \Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau \in A \Leftrightarrow (\sigma^{-1}\tau)(n) = n \Leftrightarrow \sigma^{-1}(\tau(n)) = n \Leftrightarrow$ $\sigma\cdot$
$\tau(n) = \sigma(n)$.

$\sigma \rho'_A \tau \Leftrightarrow \sigma\tau^{-1} \in A \Leftrightarrow \sigma\tau^{-1}(n) = n \Leftrightarrow \sigma(\tau^{-1}(n)) = n \Leftrightarrow$
$\tau^{-1}(n) = \sigma^{-1}(n)$

c) Folosim rezultatul de la b). Avem:

$\sigma(n) = 1 = \tau(n)$ deci $\sigma \rho_A \tau$

$\sigma^{-1}(n) = \sigma(n) = 1$ dar $\tau^{-1}(n) = n-1 \neq 1$ pt. $n \geq 3 \Rightarrow \sigma \not\rho'_A \tau$

d) $S_n/\rho_A = \{\rho_A\langle\sigma\rangle \mid \sigma \in S_n\}$

Pentru a folosi b) notăm $i = \sigma(n)$, $1 \leq i \leq n$. De notat că pentru orice i, $1 \leq i \leq n$ există $\sigma \in S_n$ astfel încât $\sigma(n) = i$. Într-adevăr dacă $1 \leq i \leq n-1$ atunci $\sigma = (i, n)$, dacă $i = n$ at. $\sigma = e$.

Acestea fiind zise, $\rho_A\langle\sigma\rangle = \{\tau \in S_n / \tau(n) = \sigma(n) = i\} = A_i$ $1 \leq i \leq n$ și deci $S_n/\rho_A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Este clar atunci că

$|S_n : A| = |S_n/\rho_A| = |\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}| = n$.

<u>Obs</u> Metoda alternativă de a găsi răspunsul la întrebarea $|S_n : A| = ?$

Se observă că funcția $f : S_{n-1} \to A$, $f(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n-1) & n \end{pmatrix}$

este o bijecție deci $|A| = |S_{n-1}| = (n-1)!$ Atunci

$|S_n : A| = |S_n| : |A| = n! : (n-1)! = n$

3. In fiecare dintre situațiile de mai jos arătați că $N \trianglelefteq G$ și calculați G/N:

a) $N=\{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\}$, $G=\mathbb{Z}_{12}$

b) $N=\{1, r^4\}$, $G=D_8$

c) $N = SL_2(\mathbb{Z}_5)=\{A\in M_2(\mathbb{Z}_5) \mid \det(A)=1\}$,

$G=GL_2(\mathbb{Z}_5)=\{A\in M_2(\mathbb{Z}_5) \mid \det(A)\neq 0\}$.

Soluție. a) $G=\mathbb{Z}_{12}$ este abelian deci orice subgrup este normal.

Temă: Verificați că N este subgrup în $\mathbb{Z}_{12}$.

$$\mathbb{Z}_{12}/N=\{N, \hat{1}+N, \hat{2}+N\}=\{\{\hat{0},\hat{3},\hat{6},\hat{9}\}, \{\hat{1},\hat{4},\hat{7},\hat{10}\}, \{\hat{2},\hat{5},\hat{8},\hat{11}\}\}$$

Obs 1. Pentru că $\mathbb{Z}_{12}/N$ are 3 elemente rezultă $\mathbb{Z}_{12}/N \cong \mathbb{Z}_3$. Același lucru poate fi verificat direct dacă facem tabla operației în $\mathbb{Z}_{12}/N$.

Obs 2 N este un subgrup al grupului ciclic $\mathbb{Z}_{12}$, deci N este el însuși ciclic. Într-adevăr $N = \langle \hat{3} \rangle$ iar $ord(\hat{3}) = 4$ în $\mathbb{Z}_{12}$ deci $N \cong \mathbb{Z}_4$.

Obs 3 Ținând cont de faptul că $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ putem verifica teorema de corespondență: subgrupul N al lui $\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ corespunde subgrupului $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ care îl conține pe $12\mathbb{Z}$. Mai mult se poate verifica și teorema a treia de izomorfism:

$$\mathbb{Z}_{12}/N = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_3.$$

b) Temă: Verificați că N este subgrup în D_8.

Se observă că $x \cdot r^4 = r^4 x$ pt. orice $x \in D_8$. Într-adevăr dacă $x = r^i$ atunci egalitatea este clară, dacă $x = s$ atunci $r^4 s = s r^{8-4} = s r^4$ iar dacă $x = s r^i$ atunci egalitatea rezultă din cazurile anterioare. Deci

$$xN = x\{1, r^4\} = \{x, xr^4\} = \{x, r^4 x\} = Nx \text{ este normal.}$$

$$D_8/N = \{N, rN, r^2N, r^3N, sN, srN, sr^2N, sr^3N\}$$

$$= \{\{1, r^4\}, \{r, r^5\}, \{r^2, r^6\}, \{r^3, r^7\}, \{s, sr^4\}, \{sr, sr^5\}, \{sr^2, sr^6\}, \{sr^3, sr^7\}\}$$

Obs De fapt am arătat că $N \subseteq Z(D_8)$ deci N este automat normal.

Temă. Faceți tabla pt D_8/N (grup cu 8 elemente) și vedeți cu care grup de opt elemente este el izomorf.

c) Se consideră funcția $f: GL_2(\mathbb{Z}_5) \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$, $f(A) = \det(A)$. Atunci $f(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = f(A) \cdot f(B)$ deci f este un morfism de grupuri. Mai mult

$$\operatorname{Ker} f = \{A \in GL_2(\mathbb{Z}_5) \mid f(A) = 1\} = SL_2(\mathbb{Z}_5)$$

și f este surjectivă (pt. că $f\begin{pmatrix} a & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = a$ pt. orice $a \in \mathbb{Z}_5^*$)

Aplicăm teorema întâi de izomorfism: $SL_2(\mathbb{Z}_5) = \operatorname{Ker} f \trianglelefteq GL_2(\mathbb{Z}_5)$ și

$$GL_2(\mathbb{Z}_5)/SL_2(\mathbb{Z}_5) \cong \operatorname{Im} f = \mathbb{Z}_5^* = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}.$$

Din faptul că grupul cât este izomorf cu $\mathbb{Z}_5^*$ ne rezultă și clasele de echivalență: $GL_2(\mathbb{Z}_5)/SL_2(\mathbb{Z}_5) = \left\{ SL_2(\mathbb{Z}_5), \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z}_5), \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z}_5), \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z}_5) \right\}$

De observat că $\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z}_5)$ conține toate matricile cu determinantul $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5^*$.

4. Să se arate că toate subgrupurile grupului quaternionilor sunt normale.

Soluție. $H = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ este grupul quaternionilor

Subgrupurile acestui grup sunt următoarele:

- subgrupurile triviale $\{1\}$ și H care sunt întotdeauna normale
- $\{1, -1\} = Z(H)$ (centrul grupului H) care este normal întotdeauna

Temă: Verificați că $\{1,-1\} = Z(H)$, deci $xh = hx$, $\forall x \in H$ și $\forall h \in \{1,-1\}$ și dacă $x \notin \{1,-1\}$ atunci există $y \in H$ astfel încât $xy \neq yx$.

- Subgrupurile $\langle i \rangle = \{1, -1, i, -i\}$, $\langle j \rangle = \{1, -1, j, -j\}$, $\langle k \rangle = \{1, -1, k, -k\}$.

Este clar că pt. orice $x \in \{i, j, k\}$ avem $|H : \langle x \rangle| = \frac{8}{4} = 2$ deci $\langle x \rangle \trianglelefteq H$ (orice subgrup de indice 2 este normal)

5. Fie G un grup cu proprietatea că $G/Z(G)$ este ciclic finit. Să se arate că G este abelian (și de fapt $Z(G) = G$, deci $G/Z(G) \cong \{1\}$).

Soluție. Reamintim că
$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \ \forall g \in G\}.$$

Știm că $G/Z(G)$ este ciclic deci acest grup este generat de un element al său, ceea ce înseamnă de o clasă de forma $gZ(G)$ cu $g \in G$.

Atunci $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle = \{ Z(G), gZ(G), \dots, g^{n-1}Z(G) \}$ unde $n = |G : Z(G)|$. Așadar
$$G = Z(G) \cup gZ(G) \cup \dots \cup g^{n-1}Z(G)$$

Atunci pentru orice $x, y \in G$ avem $x = g^i x'$ și $y = g^j y'$ unde $x', y' \in Z(G)$ și $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ și calculăm
$$\left.\begin{aligned} x \cdot y &= g^i x' \cdot g^j y' = g^{i+j} x' \cdot y' \\ yx &= g^j y' \cdot g^i x' = g^{i+j} x' \cdot y' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow xy = yx \Longrightarrow G \text{ este comutativ.}$$

Întrebare: Se poate elimina condiția de finitudine pusă asupra grupului $G/Z(G)$ în enunțul exercițiului 8 de mai sus?

6. Aplicați teorema I de izomorfism și descrieți grupul factor $G/\mathrm{Ker} f$ pentru

a) $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \{1,-1\}$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$

b) $f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{z}{|z|}$

c) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $f(x) = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$

d) $f: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $f(z) = z\bar{z}$

e) $f: GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $f(A) = \det(A)$

Soluție. Teorema I de izomorfism spune că dacă $f: G \longrightarrow H$ este un morfism de grupuri atunci $\mathrm{Ker} f \trianglelefteq G$ și $G/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f$. Deci în fiecare caz trebuie să verificăm că f este morfism să determinăm $\mathrm{Ker} f$ și $\mathrm{Im} f$.

a) $f(xy) = f(x)\cdot f(y)$ (temă)

$\mathrm{Im} f = \{1,-1\}$ (adică f este surjectiv). Într-adevăr $f(1)=1$, $f(-1)=-1$

$\mathrm{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^* / f(x)=1\} = \{x \in \mathbb{R}^* / \frac{x}{|x|}=1\} = \{x \in \mathbb{R}^* / x=|x|\} = \mathbb{R}^*_+ = (0,\infty)$.

Deci $\mathbb{R}^*_+ \trianglelefteq \mathbb{R}^*$ (normalitatea rezultă și din comutativitate) și

$$\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ \cong \{1,-1\}.$$

b) $f(z_1 z_2) = f(z_1)\cdot f(z_2)$ (temă)

$\mathrm{Im} f = \{f(z) / z \in \mathbb{C}^*\} = \{\frac{z}{|z|} / z \in \mathbb{C}^*\} = \{z \in \mathbb{C}^* / |z|=1\} \overset{not}{=} U$ (cercul trigonometric)

Într-adevăr $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$ pt. orice $z \in \mathbb{C}$ și dacă $|z|=1$ atunci $f(z) = \frac{z}{|z|} = \frac{z}{1} = z$.

$\mathrm{Ker} f = \{z \in \mathbb{C}^* / f(z)=1\} = \{z \in \mathbb{C}^* / \frac{z}{|z|}=1\} = \{z \in \mathbb{C}^* / z=|z|\} = \mathbb{R}^*_+$

Deci $\mathbb{R}^*_+ \trianglelefteq \mathbb{C}^*$ și $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*_+ \cong \{z \in \mathbb{C}^* / |z|=1\} = U$

c) $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ (verificare temă)

$\mathrm{Im} f = \{f(x) / x \in \mathbb{R}\} = \{\cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) / x \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C}^* / |z|=1\} = U$

Într-adevăr $|\cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)| = 1$ și reciproc dacă $z \in \mathbb{C}^*$ cu $|z|=1$ atunci z se scrie în formă trigonometrică $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ și pt. $x = \frac{\alpha}{2\pi}$ avem $z = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=1\} = \{x\in\mathbb{R} \mid \cos(2\pi x)+i\sin(2\pi x)=1\} =$

$= \{x\in\mathbb{R} \mid \cos(2\pi x)=1,\ \sin(2\pi x)=0\} = \{x\in\mathbb{R} \mid 2\pi x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$

Deci $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ și $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$.

d) $f(z_1 z_2) = f(z_1)\cdot f(z_2)$ (verificare temă)

$\mathrm{Im} f = \{f(z) \mid z\in\mathbb{C}^*\} = \{z\bar{z} \mid z\in\mathbb{C}^*\} = \mathbb{R}_+^*.$

Într-adevăr dacă $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ atunci $z\bar{z}=x^2+y^2>0$

Reciproc dacă $t\in\mathbb{R}_+^*$ atunci $t=(\sqrt{t})^2+0^2=z\cdot\bar{z}$ unde $z=\sqrt{t}+i\cdot 0$

$\mathrm{Ker} f = \{z\in\mathbb{C}^* \mid f(z)=1\} = \{z\in\mathbb{C}^* \mid z\cdot\bar{z}=1\} = \{z\in\mathbb{C}^* \mid |z|^2=1\} =$

$= \{z\in\mathbb{C}^* \mid |z|=1\} = U$

Deci $U \leq \mathbb{C}^*$ și $\mathbb{C}^*/U \cong \mathbb{R}_+^*$

e) $f(A\cdot B) = f(A)\cdot f(B)$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^*$ pt. că $\forall x\in\mathbb{R}^*$ avem $f\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = x$

$\mathrm{Ker} f = \{A\in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A)=1\} = SL_n(\mathbb{R})$

Atunci $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$ (aici lipsește comutativitatea, deci este important că subgrupul este normal) și $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$.

7. Fie $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_3,\ ac\neq\hat{0}\right\}$

a) Să se arate că $G \leq GL_2(\mathbb{Z}_3)$ dar $G \ntrianglelefteq GL_2(\mathbb{Z}_3)$

b) Demonstrați că $SL_2(\mathbb{Z}_3) = \{A\in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid \det(A)=1\} \trianglelefteq GL_2(\mathbb{Z}_3)$

c) Aplicați teorema a II-a de izomorfism.

<u>Soluție</u> a) Este clar că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G$.

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c'\end{pmatrix}$ în G. Atunci $A\cdot B=\begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc'\end{pmatrix}$ și

$aa'\cdot cc' = (ac)\cdot(a'c') \neq \hat{0}$ deci $AB\in G$.

Mai departe $A^{-1} = ac\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a\end{pmatrix} \in G$ (aici ținem cont că $x^2=1$ pt. orice $x\in\mathbb{Z}_3^*=\mathbb{Z}_3\setminus\{\hat{0}\}$, deci $\det(A)^{-1}=(ac)^{-1}=ac$; restul se calculează ca de obicei pt. A^{-1})

Deci $G \leq GL_2(\mathbb{Z}_3)$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ b & a\end{pmatrix} \notin G$ pt. $b=\hat{1}\neq\hat{0}$

Deci $G \ntrianglelefteq GL_2(\mathbb{Z}_3)$.

b) $SL_2(\mathbb{Z}_3) = \ker(\det)$ (detalii temă)

c) Teorema a II-a de izomorfism ne spune că $G \cdot SL_2(\mathbb{Z}_3) \leq GL_2(\mathbb{Z}_3)$,

$SL_2(\mathbb{Z}_3) \trianglelefteq G \cdot SL_2(\mathbb{Z}_3)$, $SL_2(\mathbb{Z}_3) \cap G \trianglelefteq G$ și $G / SL_2(\mathbb{Z}_3) \cap G \cong G \cdot SL_2(\mathbb{Z}_3) / SL_2(\mathbb{Z}_3)$

Trebuie să identificăm aceste grupuri

- $G \cap SL_2(\mathbb{Z}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} / \ a,b,c \in \mathbb{Z}_3,\ a \cdot c = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = 1 \right\}$.

- $G \cdot SL_2(\mathbb{Z}_3) = GL_2(\mathbb{Z}_3)$.

Într-adevăr incluziunea „$\subseteq$" este evidentă iar pt. „$\supseteq$" fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$

Atunci $\det(A) \neq \hat{0}$ deci $\det(A) = \pm \hat{1}$.

Dacă $\det(A) = 1$ atunci $A \in SL_2(\mathbb{Z}_3)$ deci $A = I_2 \cdot A \in G \cdot SL_2(\mathbb{Z}_3)$

Dacă $\det(A) = -1$ atunci luăm $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G$ cu $\det(B) = -1$

Avem $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det(B^{-1}) = -1$ deci $\det(B^{-1}A) = 1$ de unde

$B^{-1}A \in SL_2(\mathbb{Z}_3)$. Așadar $A = B(B^{-1}A) \in G \cdot SL_2(\mathbb{Z}_3)$.

Atunci $G \cdot SL_2(\mathbb{Z}_3) / SL_2(\mathbb{Z}_3) = GL_2(\mathbb{Z}_3) / SL_2(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3^* = \{1, -1\}$ (detalii temă) deci

$G / SL_2(\mathbb{Z}_3) \cap G \cong \mathbb{Z}_3^*$.

8. Aplicați teorema de corespondență pentru a determina subgr. lui $\mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ și apoi teorema a III-a de izomorfism pentru a determina grupurile factor ale lui $\mathbb{Z}_{15}$.

<u>Soluție</u>. Din teorema de corespondență subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ corespund subgrupurilor lui $\mathbb{Z}$ care conțin $15\mathbb{Z}$, anume $\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z}$ și $15\mathbb{Z}$.

Deci subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{15}$ sunt (toate normale pt. că $\mathbb{Z}_{15}$ este abelian):

$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{15}$, $3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}, \hat{12}\} = \langle \hat{3} \rangle$,

$5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{5}, \hat{10}\} = \langle \hat{5} \rangle$ și $15\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{\hat{0}\}$

Grupurile factor corespunzătoare sunt

$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{\hat{0}\}$, $\mathbb{Z}_{15}/(3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) = \dfrac{\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}} \overset{\text{Teorema a III-a izom.}}{\cong} \dfrac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_{15}/(5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) = \dfrac{\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}} \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{15}/\{\hat{0}\} \cong \mathbb{Z}_{15}$.